EXAMEN 1 - Corrigé

MAT-2910 : Analyse numérique pour l'ingénieur — Hiver 2010

Remarques :

1) Toutes les **réponses doivent être justifiées**. Dans le cas contraire, une réponse sera considérée comme nulle.
2) Seules les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté sont autorisées.
3) Déposer votre **carte d'identité avec photo sur le coin gauche** de votre table et **assoyez-vous du côté droit**.
4) Nous ne répondrons à **aucune** question concernant ces exercices, sauf si nous constatons la présence d'une ambiguïté ou d'une erreur dans l'énoncé des questions, auquel cas la réponse sera annoncée à l'ensemble des étudiants.
5) L'examen est noté sur 100 points et compte pour 40% de la note finale.

Question 1. (15 points)

Dans cet exercice, on cherche une valeur approximative de e^1. Le développement de Taylor de e^x en 0 de degré n est

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

(i) [10 pts] Donner une majoration de l'erreur lorsqu'on utilise le développement de Taylor en 0 de degré n pour avoir une approximation de e^1. En vous basant sur cette majoration estimer la valeur de n pour garantir que l'erreur de cette approximation est inférieure à 0.5×10^{-1}.

(ii) [5 pts] Pour cette valeur de n, sans faire de calcul, que pouvez-vous dire du nombre de chiffres significatifs de l'approximation que l'on obtiendrait ?

Réponses :

(i) $R_n(1) \leq \frac{1}{(n+1)!} e^1$
$R_n(1) \leq 0.227 \times 10^{-1}$ pour $n = 4$, $R_n(1) \leq 0.113$ pour $n = 3$, donc $R_n(1) \leq 0.5 \times 10^{-1}$ à partir de $n = 4$.

(ii) Comme $e^1 = 2.7\ldots$, il y a 2 chiffres significatifs

Question 2. (10 points)

Estimez l'erreur dans l'évaluation de

$$f(x) = e^{10x^2} \cos(x)$$

si on sait que x est égal à 2 à $\pm 10^{-6}$ près.
Réponse : On applique la formule de propagation d'erreur avec $x^\star = 2$ et $\Delta x = 10^{-6}$ et $f'(x) = 20xe^{10x^2} \cos(x) - e^{10x^2} \sin(x)$: Cela donne

$$\Delta f \simeq |f'(x^*)| \, \Delta x = 4.1322 \times 10^{12}$$

Question 3. (25 points)

On veut calculer l'unique racine positive r de l'équation $f(x) = 0$ où

$$f(x) = e^x - x - 2.$$

On vous propose d'appliquer 2 méthodes de points fixes, basées sur les fonctions suivantes

$$g_1(x) = e^x - 2$$
$$g_2(x) = \ln(2 + x)$$

(i) [4 pts] Comment ces fonctions g_1 et g_2 ont-elles été obtenues ? Détaillez vos réponses.

(ii) [2 pts] Dans quel intervalle de longueur 1 se trouve cette racine ? (justifier)

(iii) [9 pts] En déduire si les méthodes de points fixes utilisant g_1 et g_2 convergent, et leur ordre de convergence le cas échéant.

(iv) [3 pts] Faire 2 itérations à partir de $x_0 = 1$ pour chacune des 2 méthodes de point fixe.

(v) [5 pts] Appliquer la méthode de Newton à l'équation de départ et faites 2 itérations à partir de $x_0 = 1$.

(vi) [2 pts] Pour quelle(s) valeur(s) de x_0 ne peut-on pas démarrer la méthode de Newton ?

Réponses :

(i) $f(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) + x = x$ (2 points)
$e^x - x - 2 = 0 \Longleftrightarrow e^x = x + 2 \Longleftrightarrow x = \ln(x + 2)$

(ii) $f(1) = e - 3 < 0$ et $f(2) = e^2 - 4 > 0$, d'où l'intervalle $[1, 2]$

(iii) $g_1'(x) = e^x$. Si $1 \leq x \leq 2$, $e^1 \leq e^x \leq e^2$ donc la méthode de point fixe diverge.
$g_2'(x) = \frac{1}{2+x}$.

$$1 \leq x \leq 2 \Longleftrightarrow 3 \leq x+2 \leq 4 \Longleftrightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{4}$$

donc la méthode de point fixe converge car $g'(r) \leq \frac{1}{3}$ et elle est d'ordre 1 car $g'(r) \geq \frac{1}{4}$

(iv) $x_1 = g_1(1) = e - 2$, $x_2 = g_1(e) = e^{e-2} - 2$ (1 point)
$x_1 = g_2(1) = \ln(3)$, $x_2 = g_2(\ln(3)) = \ln(\ln(3) + 2) = 1.1309...$

(v) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - x_n - 2}{e^{x_n} - 1}$ $x_1 = \frac{2}{e-1} = 1.1639...$, $x_2 = 1.1464...$ (2 points)

(vi) Les valeurs pour lesquelles $f'(x_0) = 0$, c'est-à-dire $x_0 = 0$.

Question 4. (25 points)

On considère le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(i) [10 pts] L'inverse de la matrice est

$$\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 21 & -10 & 4 \\ -10 & 20 & -8 \\ 4 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

Sans calculer la solution de (1), en prenant $x^* = (0, 0, 10)$ comme approximation de la solution de (1), déterminer un encadrement de l'erreur relative en norme infinie (l_∞)

(ii) [10 pts] Factoriser la matrice.

(ii) [5 pts] Utiliser cette factorisation pour résoudre le système linéaire.

Réponses :

(i) On a $\|b\| = 16$, $Ax^* = (0, 20, 50)^t$, $\|r\| = \|b - Ax^*\| = 34$, $\|A\| = 9$, $\|A^{-1}\| = \frac{38}{64}$, $cond(A) = \frac{342}{64} = \frac{171}{32}$. donc

$$0.397... = \frac{32}{171}\,\frac{34}{16} \leq \frac{||\vec{e}||}{||\vec{x}||} \leq \frac{171}{32}\,\frac{34}{16} = 11.35...$$

(ii) L'étudiant pouvait utiliser la factorisation qu'il souhaitait, sans mettre à profit la structure particulière de la matrice puisqu'on n'a rien précisé dans la question. La factorisation de Choleski fait apparaitre la matrice

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La facorisation $\widetilde{L}U$ fait apparaitre les matrices

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Tandis que la décomposition $L\widetilde{U}$ fait apparaitre les transposés des matrices précédentes.

(ii) Résoudre en utilisant la factorisation précédente.

Question 5. (25 points)

On veut résoudre le système non linéaire

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 2 \\ x^2 + xy + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

(i) [10 pts] Effectuer 3 itérations de la méthode de Newton en partant du vecteur initial $(x_0, y_0, z_0) = (0.75, -0.75, 0.75)$.

(ii) [10 pts] En définissant l'erreur par

$$E_n = \|(x_n - x_{n+1}, y_n - y_{n+1}, z_n - z_{n+1})\|_\infty$$

estimer l'ordre de convergence de la méthode de Newton à partir des 3 itérations obtenues à la question précédente.

(iii) [5 pts] Pour quels vecteurs initiaux ne peut-on pas démarrer l'algorithme ?

Réponses :

(i) On trouve :
$(x_1, y_1, z_1) = (1.041666666, -1.041666666, 1.0416666666)$
$(x_2, y_2, z_2) = (1.0008333333, -1.0008333333, 1.0008333333)$
$(x_3, y_3, z_3) = (1.000000346933111, -1.000000346933111, 1.000000346933111)$.

(ii) On trouve $E_0 = 2.92 \times 10^{-1}$, $E_1 = 4.08 \times 10^{-2}$, $E_0 = 8.33 \times 10^{2}$. Donc $E_1/E_0 = 0.14$, $E_2/E_1 = 0.0204$, et $E_1/E_0^2 = 0.48$, $E_2/E_1^2 = 0.50$. D'où une convergence quadratique.

(iii) Ce sont les vecteurs pour lesquels le jacobien est singulier. on a $\det(J) = 0 \iff xyz = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$.

Analyse d'erreurs

- Développement de Taylor : $f(x_0+h) = P_n(h) + R_n(h)$ où :

$$P_n(h) = f(x_0) + f'(x_0)\ h + \frac{f''(x_0)\ h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)\ h^3}{3!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\ h^n}{n!} \quad \text{et}$$
$$R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(h))\ h^{(n+1)}}{(n+1)!} \qquad \text{où } \xi(h) \text{ est compris entre } x_0 \text{ et } x_0+h$$

- Une fonction $f(h)$ est un *grand ordre* de h^n au voisinage de 0 (noté $f(x) = O(h^n)$) s'il existe une constante positive C telle qu'au voisinage de 0 on a :

$$\left|\frac{f(h)}{h^n}\right| \leq C$$

- propagation d'erreurs en une variable :

$$\Delta f \simeq |f'(x^*)|\ \Delta x$$

- propagation d'erreurs en plusieurs variables :

$$\Delta f \quad \simeq \quad \left|\frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial x}\right|\ \Delta x\ + \left|\frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial y}\right|\ \Delta y + \left|\frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial z}\right|\ \Delta z$$

Équations non linéaires

- Algorithme des points fixes : $x_{n+1} = g(x_n)$
- Convergence des méthodes de points fixes : si $e_n = x_n - r$ alors :

$$e_{n+1} = g'(r)e_n + \frac{g''(r)e_n^2}{2} + \frac{g'''(r)e_n^3}{3!} + \cdots$$

- Méthode de Steffenson : $x_1 = g(x_0)$ et $x_2 = g(x_1)$

$$x_e = x_0 - \frac{(x_1-x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}$$

- Méthode de Newton : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

- Une racine r de la fonction $f(x)$ est *de multiplicité* m si $f(x) = (x-r)^m h(x)$ pour une fonction $h(x)$ qui vérifie $h(r) \neq 0$ ou encore si :

$$f(r) = f'(r) = f''(r) = \cdots = f^{(m-1)}(r) = 0, \quad f^{(m)}(r) \neq 0$$

- Taux de convergence de la méthode de Newton dans le cas d'une racine multiple : $1 - 1/m$
- Méthode de la sécante : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

Systèmes d'équations algébriques

- Normes vectorielles :

$$||\vec{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||\vec{x}||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- Normes matricielles :

$$||A||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad ||A||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

- Conditionnement : $\mathrm{cond}A = ||A||\,||A^{-1}||$
- Borne pour l'erreur : si $\vec{x}$ est la solution analytique et $\vec{x}^*$ est une solution approximative de $A\vec{x} = \vec{b}$, on pose $\vec{e} = \vec{x} - \vec{x}^*$ et $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}^*$ et on a :

$$\frac{1}{\mathrm{cond}A} \frac{||\vec{r}||}{||\vec{b}||} \leq \frac{||\vec{e}||}{||\vec{x}||} \leq \mathrm{cond}A \, \frac{||\vec{r}||}{||\vec{b}||}$$

- Systèmes non-linéaires : pour $\vec{x}^i$ donné, on résout :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}^i) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}^i) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}^i) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}^i) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}^i) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}^i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}^i) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\vec{x}^i) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^i) \\ f_2(\vec{x}^i) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^i) \end{bmatrix}$$

  et on pose $\vec{x}^{i+1} = \vec{x}^i + \vec{\delta x}$