**Hiver 2013**

**MAT-2920 : recherche opérationnelle**
**exercices – série 6**

1. On considère un problème de programmation linéaire

$$\begin{cases} \min z = c^t x \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Notons par $B$ les variables de base de la solution optimale et par $N$ les variables hors-base.

(a) Montrer que, si on modifie les entrées des colonnes associées aux variables hors-base de sorte que la base B demeure optimale, la solution optimale demeure inchangée.

(b) Si on note par $a_{ij}$ une entrée d'une colonne associée à une variable hors-base, montrer comment obtenir un intervalle autour de la valeur de $a_{ij}$ de sorte que la base B demeure optimale.

2. On considère le problème 6 de la série 3.

$$\min z = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \leq & 80, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 50, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq & 40, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

La base optimale est $B = \{x_1, x_5, x_2\}$

(a) Déterminer le tableau optimal du simplexe à l'aide de la méthode algébrique du simplexe revisité.

(b) Déterminer les intervalles pour chacun des $b_i$ de sorte que la base B demeure optimale.

(c) Evaluer $\dfrac{\partial z}{\partial b_i}$.

(d) Déterminer les intervalles pour chacun des $c_i$ de sorte que la base B demeure optimale.

(e) Déterminer l'intervalle du coefficient $a_{13}$ de sorte que la base B demeure optimale.

3. Considérons le problème suivant:

$$\max z = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 65, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \leq & 120, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 70, \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{cases}$$

(a) Résoudre ce problème par la méthode du simplexe.

(b) A partir du tableau optimal, faites l'analyse post-optimale des coefficients de la fonction économique. C'est-à-dire calculer les intervalles de stabilité des coefficients $c_1$, $c_2$ et $c_3$ pour lesquels le sommet optimal demeure optimal lorsqu'on fait varier indépendamment les $c_1$, $c_2$ et $c_3$.

(c) Faites l'analyse post-optimale des coefficients $b_1$, $b_2$ et $b_3$ à partir du tableau optimal de la question (a).

(d) Que serait la nouvelle solution si $c_1$ valait 4.5? Donnez la nouvelle valeur de $z$.

(e) Que serait la nouvelle solution si $b_1$ était portée à 70? Donnez la nouvelle valeur de $z$.

4. Considérons le problème suivant:

$$\min z = -2x_1 + 6x_2$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 & \geq & 1, \\ 3x_1 & \leq & 5, \\ 2x_1 - 4x_2 & \leq & 3, \\ x_1, x_2 & \geq & 0. \end{cases}$$

Le tableau optimal de ce problème est donné par:

| min | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | $-1/2$ | 1 | $-1/2$ | 0 | 0 | $1/2$ |
| $x_4$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $x_5$ | 0 | 0 | $-2$ | 0 | 1 | 5 |
| | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 3 |

(a) Calculer les intervalles fournis par l'analyse post-optimale pour $c_1$ et $c_2$.

(b) Trouver la nouvelle solution si $c_2 = -3$. Donner la nouvelle valeur de $z$.

(c) Calculer les intervalles fournis par l'analyse post-optimale autour des $b_1 = 1$, $b_2 = 5$ et $b_3 = 3$.

(d) Déterminer la nouvelle solution si $b_3 = 1$ en faisant le minimum de calcul. Donner la nouvelle valeur de $z$.

5. Considérons le problème suivant:

$$\min z = -3x_1 + (4-t)x_2 - x_3 + 15x_4$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 2, \\ -2x_1 - x_3 + 5x_4 & = & -3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0. \end{cases}$$

(a) Résoudre pour $t = 0$ sachant que la base optimale est $B = \{x_1, x_3\}$

(b) Calculer l'intervalle $t_{-1} \leq 0 \leq t_1$ qui assure que la solution optimale de (a) demeure inchangée.

(c) Déterminer la nouvelle solution optimale pour une valeur légèrement supérieure à $t_1$ et calculer l'intervalle de sorte que la nouvelle solution optimale demeure inchangée. Ceci fournira une valeur $t_2 > t_1$.

(d) Répéter la sous-question (c) avec $t_2$.

(e) Répéter la sous-question (c) avec $t_{-1} \leq 0$.

(f) Tracer le graphe de la fonction objective $z(t)$ évalué en chaque sommet optimal $x(t)$.