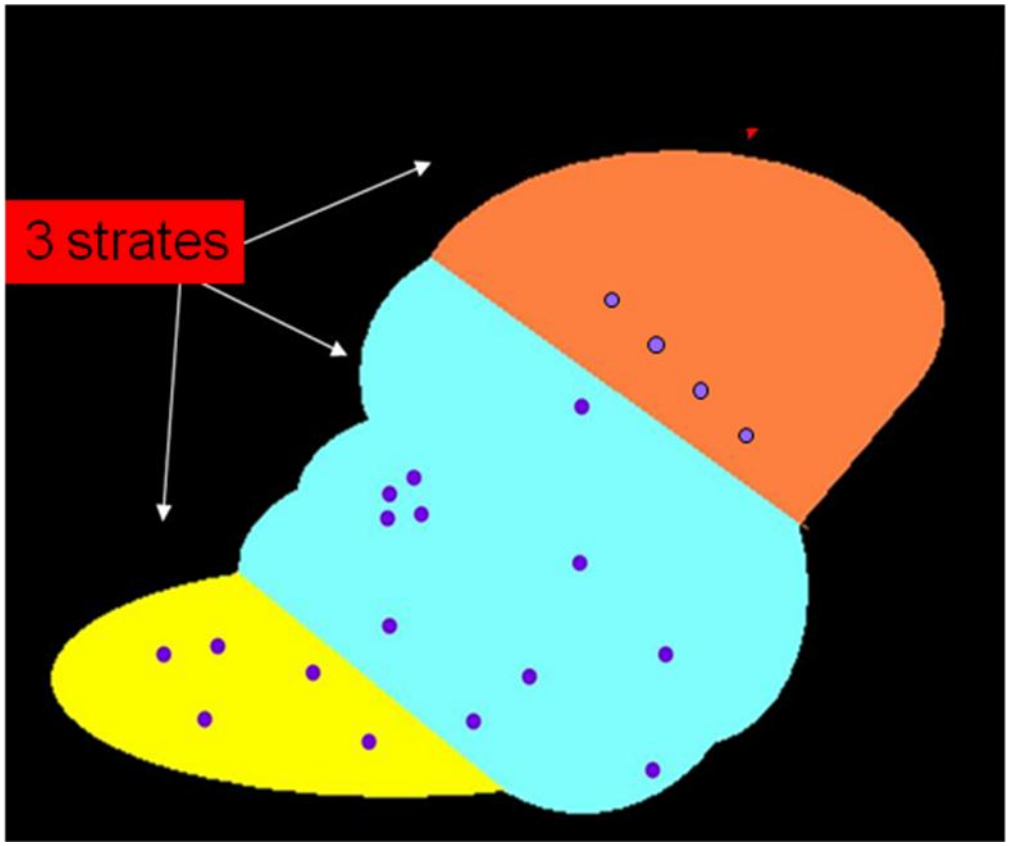
STT-4600 STT-6220 ÉCHANTILLONNAGE STRATIFIÉ (Ch.4)



Avant de tirer l'échantillon on peut diviser la population en ensembles mutuellement exclusifs appelés strates et échantillonner chaque strate indépendamment. C'est ce qu'on appelle un plan de sondage stratifié. On peut créer des strates à des fins *administratives* ou à des fins *statistiques*. Dans les enquêtes canadiennes il faut produire des estimations provinciales avec une bonne précision. Il est donc avantageux de stratifier par province et de fixer un objectif de précision provincial. En pratique ceci amène souvent à utiliser des fraction de sondage plus grandes dans les petites provinces. La stratification par province est un exemple de stratitification à des fins administratives. En général si on doit produire une estimation pour un sous-ensemble particulier de la population il est intéressant de considérer ce sous-ensemble comme une strate et de fixer a priori sa taille d'échantillon. Dans un plan aléatoire simple

sans remise, la taille d'échantillon pour un sous-ensemble particulier est une variable aléatoire qui peut parfois prendre des petites valeurs.

Dans des enquêtes de type « entreprise » les unités sont des établissements de tailles variables. Il y a donc de grosses unités qui contribuent de façon importante au total de la variable d'intérêt. La taille des établissements est souvent utilisée comme variable de stratification (X). On fait en sorte que la fraction de sondage augmente avec la taille des unités. Parfois pour les grosses unités on utilise même des strates-recensement avec une fraction de sondage égale à 1.

UNIVERSITÉ LAVAL

Service de consultation statistique

Exemple: stratification à des fins statistiques

- La population est l'ensemble des producteurs de sirop d'érable d'une région du Québec;
- X=nb d'entailles que le producteur prévoit faire;
- Y=production de sirop d'érable en hectolitre;
- Objectif: obtenir une estimation de T_Y afin de déterminer le prix de vente du sirop.

Exemple: stratification à des fins statistiques

- Enquête mensuelle sur le commerce de détail de Statistique Canada;
- Stratification administrative par province et par secteur d'activités;
- Population = ensemble des entreprises dans une strate administrative (plus de 300 strates);
- X= vente annuelle estimée avec des données fiscales
- Y= vente mensuelle réelle;
- Objectif: Estimer les ventes totales dans une strate administrative.

Si on dispose d'une variable de stratification x associée à la variable d'intérêt y on peut former les strates à partir de bornes $b_0=\min x, b_1, \ldots b_H=\max x+1$ de la façon suivante. La strate h contient toutes les unités pour lesquelles $x \in [b_{h-1}, b_h)$. Comment choisir les b_h?

Plan de sondage : Dans un plan stratifié aléatoire, la sélection des unités à l'intérieur des strates se fait selon un plan aléatoire simple sans remise. On utilise l'indice « *h* », *h=1,…,H* pour représenter la strate et on note N_h, la taille de la strate *h*; la taille de la population est $N=\Sigma N_h$. Les valeurs de la variable d'intérêt *y* dans la population sont $\left\{ y_{hj} : h = 1,...,H \text{ et } j = 1,...,N_h \right\}$.

La moyenne et la variance de *y* dans la strate h sont

$$\bar{y}_{hU} = \sum_{j=1}^{N_h} y_{hj} / N_h \text{ et } S_h^2 = \sum_{j=1}^{N_h} (y_{hj} - \bar{y}_{hU})^2 / (N_h - 1)$$

Notons que $\bar{y}_U = \sum \frac{N_h}{N} \bar{y}_{hU}$.

Si on appelle n_h la taille d'échantillon dans la strate *h*, le plan de sondage d'écrit

$$p(S) = \frac{1}{\prod_{h=1}^{N} \binom{N_h}{n_h}} \quad \text{si } S \text{ contient exactement } n_h \text{ unités de la strate } h \text{ et 0 sinon.}$$

Un plan de sondage stratifié est constitué de plans de sondage aléatoires simples indépendants dans les *H* strates. Ainsi les probabilités de sélection simple et conjointe dans la strate h sont :

$$\pi_{hi} = \frac{n_h}{N_h} \quad \text{et} \quad \pi_{hij} = \frac{n_h(n_h - 1)}{N_h(N_h - 1)}$$

La probabilité de sélection conjointe d'une unité *i* de la strate *h* et d'une unité *k* de la strate ℓ est $\pi_h \times \pi_\ell$.

Échantillon : $y_{hj} : h = 1,...,H$ et $j \in \mathcal{S}_h$ $n = \sum n_h$ est la taille d'échantillon totale.

Estimateur de $\bar{y}_U$: $\bar{y}_{str} = \sum \frac{N_h}{N} \bar{y}_{hs}$ et $\bar{y}_{hs} = \sum_{\mathcal{S}_h} \frac{y_{hj}}{n_h}$ et $\text{Var}(\bar{y}_{str}) = \sum \frac{N_h^2}{N^2} \frac{1-f_h}{n_h} S_h^2$

où $f_h = n_h / N_h$ est la fraction de sondage dans la strate h. Estimateur de variance

$$v(\bar{y}_{str}) = \sum \frac{N_h^2}{N^2} \frac{1-f_h}{n_h} s_h^2$$

où $s_h^2 = \sum_{j \in \mathcal{S}_h} (y_{hj} - \bar{y}_{hs})^2 / (n_h - 1)$ est la variance échantillonnale dans la strate *h*. Le poids de sondage d'une unité *i* de la strate *h* est $w_{hi}=N_h/n_h$.

On vérifie que l'estimation du total de *y* dans la population s'écrit $\hat{T}_y = \sum_{(h,i) \in S} w_{hi} y_{hi}$.

L'estimateur de variance s'écrit

$$v(\hat{T}_y) = \sum_{h=1}^{H} (1-f_h) \sum_{i \in S_h} \frac{n_h}{n_h - 1} \left(w_{hi} y_{hi} - \sum_{j \in S_h} \frac{w_{hj} y_{hj}}{n_h} \right)^2$$

Le théorème de la limite centrale s'applique dans chaque strate et un intervalle de confiance à 100(1-α)% pour le total de *y* dans la population est

$$\hat{T}_y \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{v(\hat{T}_y)}$$

Allocation

L'allocation est la méthode utilisée pour répartir les *n* unités de l'échantillon dans les *H* strates. On peut fixer les tailles d'échantillon strate par strate. Parfois on utilise des fonctions a_h telles que $\Sigma\, a_h = 1$ et on prend $n_h = a_h n$ pour $h=1,\ldots,H$. Voici quelques règles d'allocation que l'on retrouve en pratique.

1- Égale $a_h = 1/L$ pour $h=1,\ldots,H$

2- Proportionnelle $a_h = N_h / N$ pour $h=1,\ldots,H$

3-Puissance $a_h = (N_h \bar{y}_{hU})^p / \sum (N_\ell \bar{y}_{\ell U})^p$ pour $h=1,\ldots,H$ où p est dans (0,1)

4-Optimale $a_h = (N_h S_h) / \sum (N_\ell S_\ell)$ pour $h=1,\ldots,H$.

Sous allocation proportionelle les poids d'échantillonnage sont de *N/n* pour toutes les unités de l'échantillon. Un tel plan de sondage est dit *autopondéré*.

Les règles d'allocation 3 et 4 font intervenir la variable *y* qui est inconnue. On peut utiliser ces méthodes en utilisant une variable de stratification *x* connue pour toutes les unités de population.

Pourquoi stratifier?

Supposons que les fractions de sondage f_h sont à toutes fins pratiques nulles et comparons les variances des estimateurs de la moyenne obtenus selon un plan de sondage aléatoire simple et un plan stratifié sous allocation proportionnelle ($n_h = n \times N_h/N$).

En utilisant la décomposition de la somme de carrés en ANOVA on a :

$$(N-1)S^2 = \sum_{h,i}(y_{hi} - \bar{y}_U)^2 = \sum_{h=1}^{H} N_h(\bar{y}_{hU} - \bar{y}_U)^2 + \sum_{h,i}(y_{hi} - \bar{y}_{hU})^2$$

$$= \sum_{h=1}^{H} N_h(\bar{y}_{hU} - \bar{y}_U)^2 + \sum_{h=1}^{H}(N_h - 1)S_h^2$$

On peut réécrire la variance de $\bar{y}_s$, l'estimateur obtenu avec un plan aléatoire simple, comme

$$\mathrm{Var}(\bar{y}_s) = \frac{S^2}{n} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{h=1}^{H}\frac{N_h(\bar{y}_{hU} - \bar{y}_U)^2}{N-1} + \sum_{h=1}^{H}\frac{(N_h - 1)S_h^2}{N-1}\right\} \approx \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{H}\frac{N_h(\bar{y}_{hU} - \bar{y}_U)^2}{N-1} + \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{H}\frac{N_h S_h^2}{N}$$

La variance de l'estimateur obtenu avec un plan stratifié est

$$\mathrm{Var}(\bar{y}_{str}) = \sum \frac{N_h^2}{N^2}\frac{S_h^2}{n_h} = \frac{1}{n}\sum \frac{N_h}{N} S_h^2 \quad \text{et}$$

Donc $\mathrm{Var}(\bar{y}_{str}) \leq \mathrm{Var}(\bar{y}_s)$; le plan stratifié est beaucoup plus précis qu'un plan aléatoire simple lorsque les différences de moyennes entre les strates contribuent beaucoup à la variabilité totale de *y*.

Allocation optimale (ou de Neyman)

Si on connait les variances $\{S_h^2\}$ de y dans les strates quelle est l'allocation $\{a_h : \Sigma a_h = 1\}$, qui minimise la variance de $\bar{y}_{str}$?

Réponse : il faut prendre l'allocation optimale, $a_h = (N_h S_h) / \sum (N_l S_l)$.

Démonstration : On va utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (CS) qui dit que si $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ sont deux ensembles de *n* nombres alors $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} b_i^2}$ avec égalité si $a_i = c b_i$ pour tout *i* où *c* est une constante.

On a $\mathrm{Var}(\bar{y}_{str}) = \frac{1}{nN^2} \sum N_h^2 \frac{S_h^2}{a_h} - \sum \frac{N_h}{N^2} S_h^2$ en utilisant CS on obtient la borne inférieure suivante pour le premier terme,

$$\frac{1}{nN^2}\left[\sqrt{\sum N_h^2 \frac{S_h^2}{a_h}}\right]^2 = \frac{1}{nN^2}\left[\sqrt{\sum N_h^2 \frac{S_h^2}{a_h}} \times \sqrt{\sum a_h}\right]^2 \ge \frac{1}{nN^2} \sum N_h S_h .$$

avec égalité si $N_h \frac{S_h}{\sqrt{a_h}} = c\sqrt{a_h}$. Ainsi la variance est minimale pour l'allocation optimale $a_h = \frac{N_h S_h}{\sum N_l S_l}$. Si toutes les variances sont égales l'allocation proportionnelle est optimale.

En général il faut suréchantillonner les strates dans lesquelles *y* est plus variable.

ÉCHANTILLONNAGE STRATIFIÉ : EXEMPLE 1

Une compagnie compte 3 usines. Pour déterminer le pourcentage des employés favorables à la nouvelle politique de stationnement elle a effectué un échantillonnage stratifié proportionnel de n=300 employés.

Tableau 1 : Organisation des calculs

Usine	N_h	N_h/N	n_h	# favor.	p_h
1	1490	0.509	153	75	0.490
2	987	0.337	101	40	0.396
3	453	0.155	46	10	0.217
tot	2930		300		
Estimation de la proportion de succès				0.416	
Estimation de l'erreur-type				0.02658	
Erreur-type sous un plan aléatoire simple					0.02701
Allocation optimale			Erreur-type minimale		
strate	n_h		0.02653		
1	158				
2	102				
3	40				

Formule de variance

$$\mathrm{Var}(\hat{p}_{str}) = \sum_{h=1}^{3} \frac{N_h^2}{N^2}(1-f_h)\frac{p_h(1-p_h)}{n_h-1}$$

Estimation de la variance sous un plan aléatoire simple

$$\mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{1-f}{n-1}\hat{p}(1-\hat{p})$$

Calcul de l'allocation optimale pour chaque usine :

$$n_h = n\frac{N_h((p_h(1-p_h))^{1/2}}{\sum N_l((p_l(1-p_l))^{1/2}}$$

Conclusion: Pour des variables dichotomiques les gains de précision obtenus avec un plan stratifié sont souvent faibles.

ÉCHANTILLONNAGE STRATIFIÉ : EXEMPLE 2

Un échantillon stratifié proportionnel de 250 producteurs bovins a été effectué parmi les 1456 d'une liste fournie par un syndicat de producteurs; *y*= nombre de têtes de bétail (en milliers).

Tableau 2 : Estimations et erreur types pour différents scénarios d'échantillonnage.

strate	N_h	N_h/N	n_h	$\bar{y}_{hs}$	s_h^2
1	625	0.43	107	7.50	13.45
2	418	0.29	72	15.60	75.32
3	255	0.18	44	29.33	230.45
4	158	0.11	27	55.90	898.45
tot	1456		250		
Estimation de la taille moy.			18.90	et du total	27 520
Estimation de l'erreur-type			0.74	et du CV	3.9%

Estimation d'erreur-type sous 2 scénarios d'échantillonnage

Allocation optimale			All. puissance avec p=.7		
strate	n_h	E-T min	strate	n_h	E-T min
1	39	0.5336	1	48	0.5352
2	62		2	61	
3	67		3	67	
4	82		4	75	
total	250		total	251	

Notez que la taille moyenne du troupeau croît avec la strate. La variance est aussi croissante. L'allocation proportionnelle est loin d'être optimale!

On va déterminer les tailles d'échantillon pour une prochaine enquête!

Avec l'allocation optimale les CV des $\bar{y}_h$ varient de .59 à .78 tandis que pour l'allocation puissance ils vont de .62 à .71.

POST-STRATIFICATION

Mise en situation : Une enquête a été réalisée auprès des résidents (agés de 15 ans et plus) de la région de Québec. On a noté l'âge et le sexe des répondants qui ont été répartis en 10 groupes selon le sexe (H ou F) et l'âge (15-24, 25-44, 45-64, 65-74, 75 et +).

Figure

Caractéristiques selon l'âge	Québec (RMR) Total	Québec (RMR) Sexe masculin	Québec (RMR) Sexe féminin	Québec Total	Québec Sexe masculin	Québec Sexe féminin
Population totale [4]	715 515	345 075	370 440	7 546 130	3 687 695	3 858 440
0 à 4 ans	32 875	16 720	16 160	375 270	191 565	183 710
5 à 9 ans	34 155	17 480	16 680	398 980	203 985	195 000
10 à 14 ans	41 310	20 875	20 435	478 255	243 595	234 655
15 à 19 ans	41 530	20 855	20 675	475 005	242 185	232 820
20 à 24 ans	48 805	24 380	24 425	472 170	238 440	233 730
25 à 29 ans	52 020	26 245	25 780	492 870	245 335	247 540
30 à 34 ans	44 180	22 460	21 715	467 325	232 800	234 525
35 à 39 ans	44 990	22 565	22 430	502 300	250 340	251 960
40 à 44 ans	56 615	28 005	28 605	619 120	308 570	310 550
45 à 49 ans	60 820	29 670	31 145	644 040	318 145	325 895
50 à 54 ans	58 415	27 935	30 485	588 085	289 780	298 300
55 à 59 ans	53 520	25 900	27 620	524 350	257 790	266 560
60 à 64 ans	43 230	20 640	22 590	428 070	208 805	219 270
65 à 69 ans	29 890	13 945	15 950	315 560	150 165	165 395
70 à 74 ans	25 100	10 985	14 120	268 145	121 940	146 205
75 à 79 ans	20 550	8 130	12 415	220 530	92 485	128 045
80 à 84 ans	15 240	5 335	9 905	156 775	58 075	98 695
85 ans et plus	12 270	2 965	9 305	119 285	33 695	85 585

Grâce aux données du recensement de 2006 obtenues sur le site de Statistique Canada, on connaît la taille de ces 10 strates. Par exemple chez les 15-24 il y a 45 100 femmes et 45 155 hommes. Les tailles d'échantillon n_h dans ces 10 strates n'ont pas été fixées a priori. Peut-on quand même traiter les données comme si elles venaient d'un plan stratifié, en considérant que les tailles d'échantillon dans les strates sont fixes?

La réponse est oui, on peut faire comme si le plan était stratifié.

Même si les tailles d'échantillons sont aléatoires, on peut conditionner sur les valeurs obtenues et le plan d'échantillonnage devient alors un plan stratifié où l'allocation est proche de l'allocation proportionelle. Formellement si S est un échantillon tiré selon un plan aléatoire simple et si $\{n_h : h=1,..,H\}$ sont les tailles d'échantillon observées dans les H strates on a le résultat suivant :

$$p(S \mid n_1,...,n_H) = \frac{1}{\prod_{h=1}^{N} \binom{N_h}{n_h}}$$ si S contient exactement n_h unités de la strate h et 0 sinon.

Si on conditionne sur les tailles d'échantillon observées dans chacune des strates on obtient une plan stratifié standard et les formules précédentes s'appliquent.

NON-RÉPONSE

Il y a non-réponse lorsque certaines des personnes de l'échantillon ne remplissent pas le questionnaire. Elles refusent peut-être de répondre aux questions pour des motifs personnels. La non-réponse peut également être causée par une incapacité à rejoindre les personnes de l'échantillon; malgré de nombreux appels l'interviewer n'arrive pas en entrer en contact avec des personnes de l'échantillon. Ce type de non-réponse est dit *complète* ou *totale* car la personne échantillonnée ne fournit aucune information pour l'enquête. On parle de non-

réponse *partielle* lorsque le répondant fournit des réponses à seulement une partie du questionnaire. On s'intéresse ici à la non-réponse totale.

On dit que la non-réponse est *ignorable* si la probabilité de répondre est la même pour toutes les unités de la population. Si la non réponse est ignorable, un ensemble de n_r répondants obtenu à l'aide d'un échantillon aléatoire simple de personnes a les mêmes caractéristiques qu'un échantillon aléatoire simple de n_r personnes. Il permet de calculer des estimations non biaisées des caractéristiques de la population.

Lorsque la probablité de répondre varie dans la population on parle de non-réponse *non-ignorable*. La non-réponse est non ignorable lorsque la proportion de jeune dans l'échantillon de répondants est inférieure à celle de la population. Les jeunes sont plus difficiles à joindre. Ils sont souvent sous-représentés dans des échantillons. Lorsque la non-réponse est non-ignorable l'échantillon des répondants n'est pas représentatif de la population. Calculer des estimations à partir des seuls répondants risque de donner des résultats biaisés. La post-stratification permet de corriger certains biais associés à une non-réponse non ignorable.

En pratique la non-réponse est souvent non-ignorable et il faut en tenir compte lors du traitement des données.

CORRECTION DU BIAIS ASSOCIÉ À UNE NON-RÉPONSE NON-IGNORABLE GRÂCE À LA POST-STRATIFICATION

Dans une enquête réalisée en 1998 auprès des résidents de la région de Québec de 15 ans et plus on s'intéresse à la variable *y*, le nombre d'années de scolarité (données fictives). On dispose de 108 répondants qui ont été classés selon les catégories âge-sexe dans le tableau suivant.

Nombre de répondants (n_h) et leur scolarité moyenne ($\bar{y}_h$) par catégorie âge-sexe.

$(n_h, \bar{y}_h)$	Classe d'âge				
Sexe	15 - 24	25 - 44	45 - 64	65 - 74	75 +
Homme	(10,10)	(15,12)	(10,11)	(8,9)	(7,7)
Femme	(8,11)	(19,14)	(15,12)	(9,9)	(8,6)

On dispose des données du recensement de 1996 pour la région de Québec:

N_h	15 - 24	25 - 44	45 - 64	65 - 74	75 +
Hommes	47170	110735	76430	19510	9875
Femmes	46745	112675	82095	26940	21855
tot	554030				

Chez les 25-44 le taux de participation est de 34/(110735+112675)= 0.000152187 alors que chez les 75+ il est de 15/(9875+21855)= 0.000472739, environ quatre fois plus élevé. Il semble donc que l'échantillon est biaisé car les jeunes sont sous représentés. La non-réponse est donc non-ignorable.

L'estimation du nombre moyen d'années de scolarité obtenu en traitant les données selon un plan aléatoire simple est $\bar{y}_s = \sum n_h \bar{y}_h / \sum n_h = 10.77$. Puisque les jeunes sont sous-représentées et qu'ils sont plus scolarisées, cette estimation est sans doute biaisée.

On post-stratifie avec les données de Statistique Canada et on obtient l'estimation suivante :

$$\bar{y}_{str} = \sum N_h \bar{y}_h / \sum N_h = 11.44.$$

une augmentation de 6%. La post-stratification permet de corriger un biais associé à une sous-représentation des jeunes. D'autres biais, par exemple celui associé à une sous-représentation des immigrants, peuvent encore être présent après avoir post-stratifié..
On peut calculer une estimation de variance à l'aide des variances intra-strate suivantes

var	15 - 24	25 - 44	45 - 64	65 - 74	75 +
Hommes	9	11	13	8	7
Femmes	12	12	9	6	3

On obtient

$$v(\bar{y}_{str}) = \sum N_h^2 s_h^2 / (N^2 n_h) = 0.338^2 .$$

Ainsi un intervalle de confiance à 95% pour la scolarité moyenne est

$$11.44 \pm 1.96 \times 0.338 = (10.78, 12.10)$$

L'estimation brute sans la post-stratification de 10.77 est sans doute biaisée car elle n'est pas dans l'intervalle de confiance.

EXEMPLE : Extrait du sondage discuté au Ch.2 paru dans le Soleil le 30 décembre 2010 sur l'artiste préféré pour le festival d'été.

MÉTHODOLOGIE

Ce sondage a été réalisé par entrevues téléphoniques du 6 au 10 décembre 2010 auprès de 425 personnes habitant la région métropolitaine de Québec. Les données ont été pondérées en fonction du sexe, de l'âge et du secteur de résidence des personnes interviewées sur la base du recensement de 2006. La marge d'erreur est de 4,7 %, 19 fois sur 20.

On utilise la post-stratitication pour faire la compilation des données mais on n'en tient pas compte dans le calcul de la marge d'erreur.