Université Laval
Faculté des Sciences et de Génie

Automne 2012
Mathématiques & Statistique

STT-7130 ANALYSE DE DURÉES DE VIE
Série # 4

Exercice 1

Dans un échatillon de données censurées, on observe la variable de censure C_i pour les n patients. Les données sont donc des couples (X_i, C_i) où $X_i = \min(T_i, C_i)$. On a une censure si $X_i = C_i$ sinon, on a $X_i < C_i$. Soit $I(A)$ l'indicatrice de l'évènement A. Un estimateur pour $S_T(t)$ est donné par:

$$\hat{S}_0(t) = I\{\sum I(C_i > t) > 0\} \frac{\sum I(T_i > t; C_i > t)}{\sum I(C_i > t)}.$$

(i) Calculer l'estimateur $\hat{S}_0(t)$ et l'estimateur de Kaplan-Meier sur l'échantillon suivant: $\{(3,5),(4,4),(2,8),(3,3),(5,6)\}$. Est-ce que les deux estimateurs sont égaux?

(ii) Montrer que étant donné que $\sum I(C_i > t) = n_t$ où n_t est un nombre arbitraire positif, $\hat{S}_0(t)$ est une estimateur non biaisé de S(t) *(Suggestion: conditionner sur $C_1, \ldots, C_n$ et poser $S_C(t) = P(C > s)$.)*

(iii) Calculer la variance conditionnelle de $\hat{S}_0(t)$, étant donné $C_1, \ldots, C_n$ et en déduire une expression pour la variance incondionnelle de $\hat{S}_0(t)$. Calculer la limite de cette variance condtionnelle, multipliée par n, lorsque n tend vers l'infini. (vers quelle quantité tend n_t/n lorsque n tend vers l'infini?).

(iv) Comparer **(ii)** avec la variance asymptotique de l'estimateur de Kaplan–Meier donnée en cours et montrer que l'estimateur de Kaplan–Meier est toujours au moins aussi précis que $\hat{S}_0(t)$.

Exercice 2

Un échantillon de durées de vie (X_i, δ_i), $i = 1, \ldots, 5$ est donné par $\{(2,0),(4,1),(6,1),(7,1),(5,0)\}$

(i) Faire le graphique de l'estimateur de Kaplan–Meier de $S_T(t)$.

(ii) Calculer une estimation non-paramétrique de la durée de vie moyenne. Comparer cette valeur avec l'estimation de la moyenne sous l'hypothèse d'une loi exponentielle avec un paramètre λ inconnu.

Exercice 3

Un échantillon de durées de vie censuré est donné par $\{9, 12, 13+, 14, 15, 17, 19+, 21, 28+, 39\}$. En utilisant l'estimateur de Nelsen–Aalen, dire si la loi Weibull est adéquate à ce jeu de données.

Exercice 4

Soit (T, U) une paire de variables aléatoires positives, possiblement corrélées. La variable T est censurée par C, indépendante de (T, U). Le jeu de données est donc $\Delta = \{(X_i, U_i, \delta_i), i = 1, \ldots, n\}$ où $X_i = \min(T_i, C_i)$ et $\delta_i = I(T_i < C_i)$. On désire estimer la fonction de survie jointe de la paire (T, U) définie par

$$\pi(t, u) = P(T > t; U > u).$$

On suppose que la fonction de survie de la variable de censure est connue et est égale à $S_C(t)$. Montrer que

$$\hat{\pi}(t, u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{I(X_i > t; U_i > u)}{S_C(t)}$$

est un estimateur sans biais de $\pi(t, u)$.

Exercice 5

Considérons l'estimateur de Kaplan–Meier pour un échantillon non censuré $\{(X_i, \delta_i), i = 1, \ldots, n\}$ avec $\delta_i = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

(i) Montrer que cet estimateur est égal à

$$\tilde{S}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I(X_i > t)$$

(ii) Montrer que dans ce cas, la variance asymptotique de $\sqrt{n}\{\hat{S}(t) - S(t)\}$ vue en classe est égale à $S(t)\{1 - S(t)\}/n$.