Chapitre 4

Espaces vectoriels

4.1 Rappel sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

Nous commençons par rappeler brièvement quelques notions déjà évoquées au chapitre 1.

Définition 4.1.1 Pour $n \geq 1$, on désigne par $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des vecteurs de taille n, c'est-à-dire l'ensemble des listes ordonnées de n-éléments, de la forme $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ avec $a_i \in \mathbb{R}$.
Les opérations et relations dans $\mathbb{R}^n$ sont définies par

(i) $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ si et seulement si $a_i = b_i$ pour tout i.

(ii) $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$.

(iii) Si $k \in \mathbb{R}$, $k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$,

(iv) $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$,

Les opérations sur les vecteurs possèdent les propriétés fondamentales suivantes.

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et si k et ℓ sont des scalaires, alors

$$
\begin{aligned}
(A1) &\quad \vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^n\,, \\
(A2) &\quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}\,, \\
(A3) &\quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}\,, \\
(A4) &\quad \vec{u} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{u} = \vec{u}\,, \\
(A5) &\quad \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}\,,\ \text{i.e. } \vec{u} - \vec{u} = \vec{o}\,, \\
(MS1) &\quad k\vec{u} \in \mathbb{R}^n\,, \\
(MS2) &\quad k\,(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}\,, \\
(MS3) &\quad (k + \ell)\vec{u} = k\vec{u} + \ell\vec{u}\,, \\
(MS4) &\quad k\,(\ell\vec{u}) = (k\ell)\vec{u} = \ell\,(k\vec{u})\;, \\
(MS5) &\quad 1\vec{u} = \vec{u}\,.
\end{aligned}
$$

à titre d'exemple, nous allons démontrer la propriété $(A3)$. La démonstration des autres propriétés est laissée en exercices.
$(A3)$ $\quad \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

$$\begin{aligned}
&= (u_1,u_2,\ldots,u_n)+(v_1+w_1,v_2+w_2,\ldots,v_n+w_n)\\
&= (u_1+(v_1+w_1),u_2+(v_2+w_2),\ldots,u_n+(v_n+w_n))\\
&= ((u_1+v_1)+w_1,(u_2+v_2)+w_2,\ldots,(u_n+v_n)+w_n)\\
&= (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}\,.
\end{aligned}$$

Remarque 4.1.1 Dans ce chapitre, nous écrirons souvent les vecteurs en ligne i.e. comme des matrices $1\times n$ $\vec{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$. Il nous arrivera aussi de les écrire en colonne. Le choix à faire sera toujours guidé par le contexte. Il faut s'habituer à cette ambiguïté.

4.2 Espaces vectoriels

Dans cette section, nous allons définir les notions d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et de sous-espaces vectoriels. Le prototype de ces espaces est l'espace $\mathbb{R}^n$ lui-même. Nous nous intéresserons aussi à ses sous-espaces. Mais il y a beaucoup d'autres espaces vectoriels intéressants, nous les explorerons dans des exemples.

Définition 4.2.1 On dit qu'un ensemble non vide V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si on peut définir sur V une opération d'addition et une opération de multiplication par un scalaire, de façon à ce que les propriétés (A1)-(A5), (MS1)-MS5) soient satisfaites.

Exemple 4.2.1

a) L'espace $M_{m,n}$, des matrices à coefficients réels, $m\times n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
b) L'espace π_n des polynômes à coefficients réels de degré au plus n est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$$\pi_n=\{a_0+a_1x+\ldots a_nx^n \mid a_i\in\mathbb{R},\forall i\}.$$

Il n'est pas difficile de voir que l'addition des polynômes et leur multiplication par un scalaire sont des opérations fermées. En effet, si

$$\begin{array}{rcl}
p(x) &=& \sum_{i=0}^n a_ix^i\\
q(x) &=& \sum_{i=0}^n b_ix^i\\
\alpha &\in& \mathbb{R}
\end{array}$$

on a

$$\begin{array}{rcl}
p+q &=& \sum_{i=0}^n (a_i+b_i)x^i\\
\alpha p &=& \sum_{i=0}^n (\alpha a_i)x^i
\end{array}$$

Considéré comme espace vectoriel, l'espace π_n ressemble à l'espace R^{n+1}. Il y a au moins un point important à souligner qui concerne l'égalité. On dit qu'un polynôme p

est égal à un polynôme q si $p(x) = q(x)$ pour toutes les valeurs de la variable x. C'est un résultat non élémentaire, étudié dans le cours de mathématiques de l'ingénieur I, que ceci est équivalent à l'égalité des listes de coefficients.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \quad \forall x \Leftrightarrow (a_0, \ldots, a_n) = (b_0, \ldots b_n).$$

c) L'espace τ_n des polynômes trigonométriques d'ordre n est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$$\tau_n = \{\frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(i\,x) + b_i \sin(i\,x) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}, \forall i\}.$$

d) L'espace C des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est aussi un espace vectoriel. Ceci découle directement des propriété connues des fonctions continues.

Les propriétés suivantes dont nous avons déjà discuté pour les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, sont valables pour tous les espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4.2.1 *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\vec{u} \in V$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors*

(a) $0\vec{u} = \vec{0}$

(b) $k\vec{0} = \vec{0}$

(c) $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$

(d) *Si $k\vec{u} = 0$, alors $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.*

Démonstration: Ces démonstrations ne sont que des jeux d'écriture. Elles sont pourtant instructives et nous donnons celle de la propriété (a). En vertu de $(MS3)$,

$$0\vec{u} + \vec{u} = (1 + 0)\vec{u} = \vec{u}$$

En additionnant $-\vec{u}$ au deux membres, on obtient

$$0\vec{u} + \vec{u} - \vec{u} = \vec{u} - \vec{u} \Rightarrow 0\vec{u} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Puisque $\vec{0}$ est l'élément neutre, nous avons finalement (a). ∎

4.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 4.3.1 Un sous-ensemble W d'un espace vectoriel V est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$(A1)$ Si $\vec{u}, \vec{v} \in W$, alors $\vec{u} + \vec{v} \in W$.

$(MS1)$ Si k est un scalaire quelconque et si $\vec{u} \in W$, alors $k\vec{u} \in W$

Notons, en particulier, que l'on doit avoir $\vec{0} \in W$.

La proposition suivante, bien que d'apparence anodine, n'est pas tout à fait élémentaire.

Proposition 4.3.1 *Si W est un sous-espace d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$, alors W est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION: Ce que l'on doit démontrer ici c'est que, lorsqu'on se restreint à W, toutes les propriétés des opérations qui sont vraies dans V restent vraies. Pour la plupart c'est une évidence. Mais, par exemple, si $w \in W$, son inverse $-w$ est-il encore dans W ? La réponse est oui, car, $-1 \in \mathbb{R}$ et donc, en vertu de $(MS1)$, $-w = (-1)w \in W$. ∎

Exemple 4.3.1

a) L'ensemble des vecteurs du plan défini par

$$S = \{(x, y) \mid y = 3x + 1\}$$

n'est pas un sous-espace car $(0, 0) \notin S$.

b) Pour trois nombres réels a, b, c arbitraires ; $W = \{(x, y, z) | ax + by + cz = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
W n'est pas vide, car $(0, 0, 0) \in W$. En outre

$(A1)$ Soient (x_1, y_1, z_1) et $(x_2, y_2, z_2) \in W$; alors

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W$$

car

$$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2) = (ax_1+by_1+cz_1)+(ax_2+by_2+cz_2) = 0+0 = 0$$

.

$(MS1)$ Soient k un scalaire et $(x, y, z) \in W$. Puisque

$$k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$$

et que

$$a(kx) + b(ky) + c(kz) = k(ax + by + cz) = k0 = 0$$

on a $k(x, y, z) \in W$.

c) L'ensemble S_n des matrices symétriques de taille n est un sous-espace de l'espace des matrices $M_{n,n}$. En effet la matrice $0_{n,n}$ est symétrique. Par ailleurs si $A, B \in S_n$,

$$(A + B)^t = A^t + B^t = (A + B),$$

donc $(A + B) \in S_n$. De même, de $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A$, on déduit que $\alpha A \in S_n$, ce qui montre que S_n est un sous-espace.

d) L'ensemble des polynôme de degré 2 est un sous espace de l'espace des polynômes de degré 3.

e) L'ensemble des polynômes de degré n qui sont nuls en $x = 0$ est un sous-espace de π_n. En effet, cet ensemble contient le polynôme $p \equiv 0$. En plus si $p(0) = q(0) = 0$ pour $p, q \in \pi_n$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(p + \alpha q)(0) = p(0) + \alpha q(0) = 0 + \alpha 0 = 0$.

f) L'ensemble des polynômes de degré n qui satisfont $p(0) = 1$ n'est pas un sous-espace car il ne contient pas le polynôme $p \equiv 0$.

Définition 4.3.2 Un vecteur $\vec{w}$ est appelé combinaison linéaire des r vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ s'il existe des scalaires $k_1, \ldots, k_r$ pour lesquels

$$\vec{w} = k_1\vec{v}_1 + \ldots + k_r\vec{v}_r\,.$$

Exemple 4.3.2

a) Dans $\mathbb{R}^2$ tous les vecteurs sont des combinaisons linéaires des vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Ils sont aussi tous des combinaisons linéaires des vecteurs $(-1, 1)$ et $(2, 3)$. Pour vérifier ce fait, il sera utile de noter les vecteurs en colonne. Soit donc (x, y) donné, on voudrait trouver deux scalaires a et b pour lesquels

$$a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Ceci est équivalent à chercher la solution (a,b) du système

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée et sa forme échelon s'écrivent

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & | & x \\ 1 & 3 & | & y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & | & x \\ 0 & 5 & | & y + x \end{pmatrix}.$$

Les coefficients cherchés sont donc

$$b = \frac{1}{5}(x + y), \quad a = \frac{1}{5}(-3x + 2y),$$

comme on peut le vérifier directement en substituant dans 4.1. Il y a donc beaucoup de paires de vecteurs du plan qui permettent d'exprimer tous les vecteurs comme des combinaisons linéaires.

b) Le vecteur de l'espace, $(9, 10, 11)$ est-il une combinaison linéaire de $(1, 2, 3)$ et de $(4, 5, 6)$? Autrement dit, existe-t-il des scalaires k_1 et k_2 tels que

$$(9, 10, 11) = k_1(1, 2, 3) + k_2(4, 5, 6).$$

Pour répondre, il nous faut encore une fois résoudre le système

$$(*)\left\{\begin{array}{rcl} k_1+4k_2 & = & 9 \\ 2k_1+5k_2 & = & 10 \\ 3k_1+6k_2 & = & 11 \end{array}\right. .$$

Effectuant des opérations élémentaires sur les rangées de la matrice augmentée de ce système, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} 21 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 10 \\ 3 & 6 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & -6 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 4R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système $(*)$ est alors équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{rrcl} k_1 & & = & -\frac{5}{3}\,, \\ & k_2 & = & \frac{8}{3}\,, \end{array}\right.$$

ce qui nous permet de conclure que $(9,10,11)$ est combinaison linéaire de $(1,2,3)$ et $(4,5,6)$.

c) Le polynôme x est une combinaison linéaire des polynômes $x+1$ et $2x-7$, puisque

$$x = \frac{7}{9}(x+1) + \frac{1}{9}(2x-7).$$

Remarque 4.3.1 Les raisonnement précédents mettent en lumière le fait élémentaire mais utile suivant que nous avons déjà évoqué.

Alerte 4.3.1 Dans $\mathbb{R}^n$, $\vec{u}$ est une combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$, dont les coefficients sont $k_1, \ldots, k_m$, si et seulement

$$\vec{u} = V\vec{k}, \quad \text{où} \quad \vec{k} = (k_1, \ldots, k_m)$$

et V désigne la matrice $n \times m$ dont les **colonnes** sont les vecteurs $\vec{v}_i$.

Définition 4.3.3 Si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$, on dit alors que $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ engendrent E, ou qu'ils forment un ensemble générateur de E.

Exemple 4.3.3 Est-ce que $(2,3,4)$, $(4,5,6)$, $(6,7,8)$ engendrent $\mathbb{R}^3$? Pour répondre oui, il faut montrer que tout vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(2,3,4)$, $(4,5,6)$ et $(6,7,8)$. Soit (x,y,z) un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$; est-ce qu'il existe des scalaires k_1, k_2 et k_3 tels que

$$(x,y,z) = k_1(2,3,4) + k_2(4,5,6) + k_3(6,7,8)\,?$$

En vertu de la remarque 4.3.1, il nous faut résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Effectuons des transformations élémentaires sur les rangées de la matrice augmentée de 4.2 :

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 6 & x \\ 3 & 5 & 7 & y \\ 4 & 6 & 8 & z \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \leftarrow \frac{1}{4}R_3}]{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \frac{x}{2} \\ 1 & \frac{5}{8} & \frac{7}{3} & \frac{y}{3} \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{z}{4} \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \frac{x}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{y}{3} - \frac{x}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow -2R_3]{R_2 \leftarrow -3R_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \frac{x}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -y + \frac{3}{2}x \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{z}{2} + x \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \frac{x}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -y + \frac{3}{2}x \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x + y - \frac{z}{2} \end{array}\right]$$

La dernière équation s'écrit $0k_1 + 0k_2 + 0k_3 = -\frac{1}{2}x + y - \frac{z}{2}$; ceci veut dire que les seuls vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ qui s'écrivent comme combinaison linéaire de $(2,3,4)$, $(4,5,6)$ et $(6,7,8)$ sont ceux vérifiant

$$-\frac{1}{2}x + y - \frac{z}{2} = 0 \quad \text{i.e.} \quad -x + 2y - z = 0.$$

Nous concluons donc que $(2,3,4)$, $(4,5,6)$ et $(6,7,8)$ n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.

Définition 4.3.4 Soient $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ des vecteurs d'un espace vectoriel V. Le sous-espace engendré par $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$. Il est dénoté *lin* $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ et est égal à l'ensemble

$$\{k_1\vec{v}_1 + \ldots + k_r\vec{v}_r | k_1 \in \mathbb{R}, \ldots, k_r \in \mathbb{R}\}\ . \tag{4.3}$$

Il y a, dans cette définition, un abus de langage. En effet qu'est ce qui nous assure que l'ensemble défini par 4.3 est bien un sous-espace ? Ce fait doit être vérifié. Bien que la démonstration soit technique, elle est plutôt immédiate et nous ne la ferons pas.

Exemple 4.3.4

a) Caractériser le sous-espace $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(0,1,0)$ et $(1,-1,2)$. Soit $\vec{v} = (x,y,z)$ un élément de ce sous-espace. On a que

$$(x,y,z) = \alpha(0,1,0) + \beta(1,-1,2) = (\beta, \alpha-\beta, 2\beta),$$

c'est-à-dire

$$x = \beta, z = 2\beta, y = \alpha - \beta \Rightarrow \frac{1}{2}z - x = 0$$

Les vecteurs $\vec{v}$ sont donc tous tracés sur le plan $x - \frac{1}{2}z = 0$ et le sous-espace engendré est un plan qui passe par l'origine.

b) Caractériser le sous-espace de π_2 engendré par les monômes 1 et $(x-1)^2$.

Pour obtenir la caractérisation cherchée, notons que les polynômes de ce sous-espace s'écrivent

$$p(x) = a + b(x-1)^2. \tag{4.4}$$

Si on développe, on voit que

$$p(x) = (a+b) - 2\,b\,x + x^2 = (a+b) - b\,x\,(x-2).$$

Le graphe de $x\,(x-2)$ est symétrique par rapport à $x = 1$. Ajouter une constante ne change pas ce fait. Inversement, si $q(x) = A + B\,x\,(x-2)$, est un polynôme dont le graphe est symétrique par rapport à $x = 1$, q peut aussi s'écrire

$$q(x) = (A-B) + B(x^2 - 2\,x + 1) = (A-B) + B(x-1)^2$$

c'est-à-dire que q est dans notre sous-espace. Par conséquent, le sous-espace considéré est celui des paraboles dont le graphe est symétrique par rapport à $x = 1$.

4.4 Indépendance linéaire

Nous revenons maintenant sur une notion importante qui a déjà été introduite au chapitre 0 et considérons son extension au cas général des espaces vectoriels quelconques.

Définition 4.4.1 r vecteurs $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ d'un espace vectoriel V sont dits linéairement indépendants si les seuls scalaires pour lesquels $k_1\vec{v}_1 + \ldots + k_r\vec{v}_r = 0$ sont $k_1 = 0, \ldots, k_r = 0$. On dit aussi que l'ensemble

$$\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$$

est un ensemble linéairement indépendant. Si un ensemble n'est pas linéairement indépendant, il est dit linéairement dépendant.

Remarque 4.4.1 En se reportant de nouveau à la remarque (4.3.1), nous pouvons traduire la définition ci-dessus de la façon suivante.

Alerte 4.4.1 Dans $\mathbb{R}^n$ un ensemble $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$, dont la matrice associé est notée V, est linéairement indépendant, si et seulement si la seule solution du système $V\vec{k} = \vec{0}$ est le vecteur de coefficients $\vec{k} = \vec{0}$.

Exemple 4.4.1 Supposons que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ forment un ensemble linéairement dépendant ; montrons qu'un vecteur est alors multiple de l'autre ; en effet, supposons qu'il existe deux scalaires k_1, k_2 non tous nuls tels que $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 = \vec{0}$; alors $\vec{v}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\vec{v}_2$ ou $\vec{v}_2 = -\frac{k_1}{k_2}\vec{v}_1$ dépendamment du fait que $k_1 \neq 0$ ou que $k_2 \neq 0$. Réciproquement, supposons qu'un des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ est un multiple de l'autre. Alors il existe k tel que $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$; d'où $1\vec{v}_1 - k\vec{v}_2 = \vec{0}$ et $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ forment un ensemble linéairement dépendant.

Exemple 4.4.2 Est-ce que $(1,1,1)$, $(1,2,3)$, $(1,0,-1)$ forment un ensemble linéairement indépendant ?
En vertu de la remarque (4.4.1), répondre à cette question c'est étudier l'ensemble solution du système homogène dont La matrice augmentée est donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Appliquons l'algorithme d'élimination

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système homogène de départ est donc équivalent au système

$$\begin{cases} k_1 \quad + 2k_3 = 0 \\ \quad k_2 - k_3 = 0\,. \end{cases}$$

D'où $k_2 = k_3$ et $k_1 = -2k_3$ avec k_3 quelconque. Les scalaires k_1, k_2, k_3 ne sont pas nécessairement tous nuls et les vecteurs $(1,1,1)$, $(1,2,3)$ et $(1,0,-1)$ ne forment donc pas un ensemble linéairement indépendant.

En fait, le raisonnement de l'exemple 4.4.2 peut être généralisé pour donner le résultat suivant.

Théorème 4.4.1 *Soit $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ un ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $r > n$, alors S est linéairement dépendant.*

DÉMONSTRATION: Soit $k_1\vec{v}_1 + \dots + k_r\vec{v}_r = \vec{0}$, où

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = (v_{11}, v_{21}, \dots, v_{n1}) \\ \vec{v}_2 = (v_{12}, v_{22}, \dots, v_{n2}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{v}_r = (v_{1r}, v_{2r}, \dots, v_{nr})\,. \end{cases}$$

Nous déduisons alors que

$$\begin{cases} v_{11}k_1 + v_{12}k_2 + \dots + v_{1r}k_r = 0 \\ v_{21}k_1 + v_{22}k_2 + \dots + v_{2r}k_r = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_{n1}k_1 + v_{n2}k_2 + \dots + v_{nr}k_r = 0\,, \end{cases}$$

i.e. un système homogène de n équations à r inconnues. Puisque $r > n$, il découle du théorème 2.5.1 que ce système possède une solution non triviale, c'est-à-dire qu'il existe des scalaires $k_1, k_2, \dots, k_r$ non tous nuls tels que $k_1\vec{v}_1 + \dots + k_r\vec{v}_r = \vec{0}$. D'où S est linéairement dépendant.
■

4.5 Base et dimension

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour démontrer les propriétés des bases qui ont été évoquées au chapitre 0.

Définition 4.5.1 Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ un ensemble de r vecteurs de V. Alors S est une *base* pour V si

(i) S est un ensemble linéairement indépendant

(ii) S engendre V.

Exemple 4.5.1 Montrons que $(1, 2)$, $(3, 4)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Notons V la matrice dont les colonnes sont les deux vecteurs. Cette matrice est 2×2.

(i) Pour montrer que $(1, 2)$ et $(3, 4)$ forment un ensemble linéairement indépendant, nous devons montrer que la seule solution de $V\vec{x} = \vec{0}$ est $\vec{x} = \vec{0}$. Considérons donc la matrice augmentée et appliquons l'algorithme d'élimination.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 2 & 4 & | 0 & \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -2 & | 0 & \end{pmatrix}.$$

La solution du système triangulaire obtenue est $x_1 = x_2 = 0$ donc l'ensemble est linéairement indépendant.

(ii) Montrons maintenant que $(1,2)$, $(3,4)$ engendrent $\mathbb{R}^2$. Pour ce faire, nous devons montrer que, tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ est une combinaison de ces deux vecteurs, ou encore que le système $V\vec{k} = \vec{b}$ possède toujours une solution. Or V est une matrice carrée telle que le système homogène associé ne possède que la solution $\vec{0}$. Ceci entraine que tous les système non homogènes possède une solution, donc que $(1,2)$, $(3,4)$ engendrent $\mathbb{R}^2$.

Exemple 4.5.2

(a) Trouvons une base pour

$$W = \{(x,y,z,w) | x+y+z+w = 0 \quad \text{et} \quad x-2y+z-w = 0\} \ .$$

W est l'ensemble des vecteurs qui satisfont

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+w & = & 0 \\ x-2y+z-w & = & 0 \end{array} \right. .$$

Transformons la matrice augmentée du système $(*)$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{array} \right].$$

Nous en tirons que W est l'ensemble des vecteurs qui satisfont $\left\{ \begin{array}{rcl} x+z+\frac{1}{3}w & = & 0 \\ y+\frac{2}{3}w & = & 0 \end{array} \right.$.

Donc $(x,y,z,w) \in W$ si et seulement si $(x,y,z,w) = \left(-z-\frac{1}{3}w, -\frac{2}{3}w, z, w\right)$ i.e. si et seulement si

$$(x,y,z,w) = z(-1,0,1,0) + w\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 1\right) .$$

D'où $(-1,0,1,0)$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 1)$ forment un ensemble générateur pour W. Montrons qu'ils forment aussi un ensemble linéairement indépendant.

Si $k_1(-1,0,1,0) + k_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 1\right) = (0,0,0,0)$, on doit avoir $k_1 = k_2 = 0$. Donc $(-1,0,1,0)$ et $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 1\right)$ forment une base pour W.

(b) Trouvons une base pour le sous-espace des matrices 3×3 symétriques. Pour ce faire écrivons d'abord une telle matrice sous la forme la plus générale possible.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc 6 paramètres disponibles a, b, c, d, e, f qui peuvent être choisis indépendemment les uns des autres. On s'attend donc à ce que cet espace soit de dimension 6. Pour trouver une base, procédons comme dans $\mathbb{R}^n$ et mettons tour à tour un paramètre égal à 1 et tous les autres égaux à 0.

$$a = 1 \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = 1 \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c = 1 \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = 1 \quad S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e = 1 \quad S_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f = 1 \quad S_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est clair que la matrice générale A s'écrit

$$A = aS_1 + bS_2 + cS_3 + dS_4 + eS_5 + fS_6,$$

donc que les S_i engendrent toutes les matrices symmétriques. Par ailleurs, la combinaison linéaire générale A ne peut être la matrice nulle que si toutes ses entrées, c'est-à-dire tous les coefficients dans la combinaison linéaire, sont nulles. Les S_i forment donc une base.

(c) Trouvons une base du sous espace des polynômes du troisième degré qui s'annulent en 0 et en 1. Nous savons du cours de Mathématiques de l'ingénieur I qu'un tel polynôme s'écrit sous la forme générale

$$p(x) = x(x-1)(ax+b).$$

Puisque nous avons deux paramètres libres, nous nous attendons à ce que l'espace soit de dimension 2. Or, si on développe le membre de droite de la définition de p on obtient

$$p = ax^2(x-1) + bx(x-1),$$

ce qui exprime que $p_1 = x^2(x-1)$ et $p_2 = x(x-1)$ engendrent ce sous-espace de π_3. Est-ce que p_1 et p_2 sont linéairement indépendants ? Pour le voir, supposons que

$$ap_1 + bp_2 = ax^2(x-1) + bx(x-1) = 0.$$

Cette égalité doit être valable pour tout x. Prenons $x = 2$ puis $x = 3$ on aura

$$4a + 2b = 0 \quad \text{et } 18a + 6b = 0 \Rightarrow a = b = 0.$$

Donc $\{p_1, p_2\}$ est une base de ce sous-espace.

Théorème 4.5.1 *Soit $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ une base d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$. Alors tout ensemble de plus de n vecteurs est linéairement dépendant.*

Démonstration: Soit $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ un ensemble de m vecteurs de V avec $m > n$. Soit

$$k_1\vec{w}_1 + \ldots + k_m\vec{w}_m = 0\,.$$

Comme $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ est une base de V, alors

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{w}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{v}_n \\ \vec{w}_2 = a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{v}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{w}_m = a_{1m}\vec{v}_1 + a_{2m}\vec{v}_2 + \ldots + a_{nm}\vec{v}_n \end{array}\right. ,$$

pour des scalaires $a_{ij}(i = 1, \ldots, n\ ;\ j = 1, \ldots, m)$. Donc $k_1\vec{w}_1 + \ldots + k_m\vec{w}_m = \vec{0}$ entraîne

$$(a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1m}k_m)\,\vec{v}_1 + (a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{2m}k_m)\,\vec{v}_2$$
$$+ \ldots + (a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \ldots + a_{nm}k_m)\,\vec{v}_m = \vec{0}\,.$$

Comme $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ est en particulier un ensemble linéairement indépendant, alors

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1m}k_m = 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{2m}k_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \ldots + a_{nm}k_m = 0 \end{array}\right. .$$

Ce dernier système possède plus d'inconnues que d'équations vu que $m \geq n$. Alors d'après le théorème 2.5.1, ce système possède une infinité de solutions. Nous concluons donc qu'il existe des scalaires $k_1, \ldots, k_m$ non tous nuls tels que

$$k_1\vec{w}_1 + \ldots + k_m\vec{w}_m = \vec{0}\ ;\ \text{d'où } \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$$

est un ensemble linéairement dépendant.

■

Définition 4.5.2 Un espace vectoriel non nul V est dit de *dimension finie* s'il existe un ensemble fini de vecteurs $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ qui forme une base de V.

Théorème 4.5.2 *Deux bases d'un espace vectoriel V de dimension finie ont le même nombre de vecteurs.*

DÉMONSTRATION: Soient $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ et $S' = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ deux bases de V. Si $n > m$, alors S est linéairement dépendant d'après le théorème 4.5.1 ; donc $n \leq m$. Toujours d'après le théorème 4.5.1 , si $m > n$, alors S' est linéairement dépendant ; donc $m \leq n$. D'où $m = n$.

■

Corollaire 4.5.1 Toute base de $\mathbb{R}^n$ possède n vecteurs.

Définition 4.5.3 La dimension d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$, dénotée $\dim V$, est le nombre de vecteurs dans une base de V ; par définition, $\left\{\vec{0}\right\}$ est un espace vectoriel de dimension 0.

Théorème 4.5.3 *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n.*

(i) Si $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ est un ensemble linéairement indépendant de n vecteurs de V, alors S est une base de V.

(ii) Si $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ est un ensemble de n vecteurs de V qui engendrent V, alors S est une base de V.

(iii) Si $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ est un ensemble linéairement indépendant de r vecteurs de V, avec $r < n$, alors il existe $\vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n$ tels que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$ est une base de V.

4.6 Sous-espaces associés à une matrice

Définition 4.6.1 On appelle espace des rangées d'une matrice $A \in M_{m,n}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par ses rangées. On appelle espace des colonnes d'une matrice $A \in M_{m,n}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^m$ engendré par ses colonnes.

REMARQUE 4.6.1 L'espace des rangées d'une matrice est l'espace des colonnes de sa transposée et inversement.

Le lemme suivant donne une caractérisation opératoire d'une base de l'espace des rangées. Sa démonstration est laissée en exercice.

Lemme 4.6.1 *Soit $A \in M_{m,n}$,*

a) Si B est équivalent à A par les rangées, l'espace des rangées de B est le même que celui de A.

b) Les rangées non nulles d'une forme échelon de A forment une base de l'espace des rangées de A.

Exemple 4.6.1 Trouvons une base de l'espace des rangées de A et une base de l'espace des colonnes de A, où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Donc $\vec{r}_1 = (1, 2, 3)$ et $\vec{r}_2 = (0, -3, -6)$ forment une base de l'espace des rangées de A.

(ii)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Procédons de la même façon.

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2\,R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{3} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ forment une base de l'espace des colonnes de A.

Théorème 4.6.1 *Soit A une matrice $m \times n$. Alors la dimension de l'espace des rangées de A est égale à la dimension de l'espace de ses colonnes.*

DÉMONSTRATION: Nous commençons par le cas d'une matrice échelon réduite. Soit $R \in M_{m,n}$ une telle matrice. A cause de la condition sur la position des 1 directeurs, la dimension de l'espace des rangée est précisémment égale au nombre de rangées non nulles. Ce nombre est aussi égal à celui des colonnes contenant un 1 directeur. Observons d'abord que ces colonnes sont linéairement indépendantes. On peut aussi se convaincre qu'elles engendrent toutes les autres. Si on accepte ce fait, elles forment une base de l'espace des colonnes dont la dimension est égale à celle de l'espace des rangées.

Pour passer au cas général, rappelons que nous savons déjà que A et sa forme échelon réduite ont le même espace des rangées. Malheureusement, elles n'ont pas le même espace des colonnes. Cependant, la dimension de ces espaces coïncident. Plus précisément, soit $k_1, \ldots, k_r$ les numéros des colonnes de la forme échelon réduite qui contiennent des 1 directeurs et forment donc une base de l'espace colonne de cette matrice. On peut montrer que les colonnes de numero $k_1, \ldots, k_r$ de la matrice de départ forment une base de son espace colonne (voir l'exemple 4.6.2), ce qui complète la démonstration du théorème. ∎

Exemple 4.6.2 Revenons au cas de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Nous avons montré que sa forme échelon était donnée par

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Les colonnes 1 et 2 engendrent l'espace des colonnes de R, donc il existe α, β non tous les deux nuls, tels que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En vertu de la remarque 4.3.1 ceci implique que $(\alpha, \beta, -1)$ est une solution du système homogène $R\vec{x} = \vec{0}$, donc aussi une solution du système $A\vec{x} = \vec{0}$. Mais on doit alors avoir, toujours par la même remarque,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui montre que les deux première colonnes de A engendrent tout son espace colonne. Un raisonnement semblable montre qu'elles sont linéairement indépendantes.

4.6.1 Rang d'une matrice, prise 2

Nous avons défini le rang d'une matrice A, comme étant le nombre de lignes non nulles de sa forme échelon réduite R. Ce nombre est certainement égal à la dimension de l'espace ligne de R donc à celle de celui de A. En vertu du théorème 4.6.1 c'est aussi la dimension de l'espace colonne. Ainsi, nous avons le

Corollaire 4.6.1 Si $A \in M_{m,n}$ et si $r = \text{rang}\,(A)$, la dimension de l'espace des rangées (et aussi de l'espace des colonnes) de A est r.

Exemple 4.6.3 Trouvons le rang de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow -R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 5R_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{18}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donc rang $A = 3$.

Théorème 4.6.2 *Pour toute matrice $n \times n$, A, les énoncés suivants sont équivalents :*

(a) *A est inversible.*

(b) *A est équivalente suivant les rangées à I_n.*

(c) *rang $A = n$.*

(d) *Les rangées de A sont linéairement indépendantes.*

(e) *Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.*

DÉMONSTRATION: Nous avons déjà vu que (b) est une propriété équivalente à la propriété (a). Montrons (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (b).

(i) Montrons que (b) $\Rightarrow$ (c). Si A est équivalente suivant les rangées à I_n, alors le rang de A est égal au rang de I_n, i.e. rang $A = n$.

(ii) Montrons que (c) $\Rightarrow$ (d). Si rang $A = n$, l'espace des rangées de A est de dimension n. Comme les n vecteurs rangées de A engendrent l'espace des rangées de A, alors d'après le théorème 9, ils forment une base de l'espace des rangées de A. Ils forment donc en particulier un ensemble linéairement indépendant.

(iii) Montrons que (d) $\Rightarrow$ (e). Supposons que les vecteurs rangées de A forment un ensemble linéairement indépendant. Alors

$$n = \text{ rang } A = \dim \quad (\text{espace des colonnes de } A).$$

D'où les vecteurs colonnes de A forment un ensemble linéairement indépendant.

(iv) Montrons que (e) $\Rightarrow$ (b). Supposons que les vecteurs colonnes de A forment un ensemble linéairement indépendant. Alors

$$n = \text{ rang } A = \dim \quad (\text{espace des rangées de } A).$$

Donc n est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les rangées de la forme échelon réduite de A suivant les rangées, ce qui entraîne que A est équivalente suivant les rangées à I_n.

■

REMARQUE 4.6.2 La remarque (4.3.1) fournit un lien direct entre l'espace colonne d'une matrice et la solubilité des système homogène associé. En effet, il découle directement de cette remarque qu' un système de m équations linéaires à n inconnues $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistant si et seulement si $\vec{b}$ est dans l'espace des colonnes de A.