Chapitre 5

Déterminant

5.1 La fonction déterminant

Le déterminant d'une matrice carrée est un scalaire dont la valeur fournit une indication sur l'inversibilité de cette matrice. Pour préciser la nature de cette indication, penchons nous d'abord sur les cas 2×2 et 3×3.

5.1.1 Les matrices 2×2 et 3×3

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2. Appliquons la méthode d'élimination de Gauss à A.

- Si $a \neq 0$,

$$A \xleftarrow{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{c}{a} R_1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a} b \end{pmatrix}$$

  On voit que A sera inversible si la seconde entrée de la diagonale de la forme échelon est non nulle, i.e. si

$$\det(A) = ad - bc \neq 0.$$

- Si $a = 0$

$$A \xleftarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

  A est inversible si c et b sont non nuls c'est-à-dire si

$$bc = -(ab - bc) = -\det(A) \neq 0.$$

La quantité $\det(A)$ est appelée le déterminant de la matrice A, qui est inversible si et seulement si cette quantité est non nulle. Examinons maintenant la cas 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Limitons temporairement notre attention au cas $a \neq 0$. Une première étape de la méthode d'élimination s'écrit

$$A \overset{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{d}{a} R_1}{\longleftarrow} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e - \frac{d}{a}b & f - \frac{d}{a}c \\ g & h & i \end{pmatrix} \overset{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{g}{a} R_1}{\longleftarrow} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e - \frac{d}{a}b & f - \frac{d}{a}c \\ 0 & h - \frac{g}{a}b & i - \frac{g}{a}c \end{pmatrix}.$$

Puisque $a \neq 0$, la matrice A ne sera inversible que si le bloc 2×2 est lui même inversible ce qui, en vertu de ce qui précède, n'est possible que si

$$(e - \frac{d}{a}b)(i - \frac{g}{a}c) - (f - \frac{d}{a}c)(h - \frac{g}{a}b) \neq 0.$$

On peut multiplier les deux membres de l'inégalité par a^2 sans changer la condition qui s'écrit maintenant

$$(ae - db)(ai - gc) - (af - dc)(ah - gb) \neq 0.$$

Si on regroupe convenablement les termes, le membre de gauche de l'inégalité peut se récrire

$$a\left[a(ei - fh) - b(id - fg) + c(dh - ge)\right].$$

La quantité entre crochets est appelée déterminant de A. On a, de nouveau, que A est inversible, si et seulement si $\det(A) \neq 0$. En faisant l'échange de ligne approprié, il ne serait pas difficile de montrer que ce résultat reste valide même si $a = 0$.

Nous avons maintenant une définition constructive du déterminant pour les matrices de taille 2 et 3.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = ad - bc$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \det(A) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - ge)$$

$$\det(A) = aei - afh - bfg - bid + cdh - cge$$

Nous pouvons tirer quelques conclusions intéressantes qui resteront vraies dans le cas général et qui, pour $n = 2, 3$, peuvent être vérifiées par un calcul direct.

C1 $\det(A) = det(A^t)$.

C2 Si $n = 3$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a \det\left(\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}\right) - b \det\left(\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}\right) + c \det\left(\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}\right) \\ &= a \det\left(\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}\right) - d \det\left(\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix}\right) + g \det\left(\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}\right) \\ &= -d \det\left(\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix}\right) + e \det\left(\begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix}\right) - f \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

C3 Si B est obtenu de A par échange de ligne $\det(B) = -\det(A)$.

C4 Si A contient une rangée de 0, $\det(A) = 0$.

C5 Si A a deux rangées égales, $\det(A) = 0$.

C6 Si B est obtenue de A par une opération élémentaire du type $R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j$, alors $\det(B) = \det(A)$.

Seul le dernier énoncé exige vraiment des commentaires. Nous vérifions sa validité dans le cas 3×3. Supposons que A soit de la forme (5.1) et que B soit obtenue de A par l'opération $R_2 \leftarrow R_2 + \alpha R_1$, on aura

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d + \alpha a & e + \alpha b & f + \alpha c \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

Donc

$$\det(B) = -(d + \alpha a) \det \left(\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} \right) + (e + \alpha b) \det \left(\begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} \right) - (f + \alpha c) det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix} \right).$$

En séparant les termes contenant α des autres, on obtient alors

$$\det(B) = \det \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \right) + \alpha \det \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix} \right).$$

Le second déterminant est nul en vertu de la propriété C5 ce qui démontre C6.

Exemple 5.1.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) $\det(A) = 1(18 - 20) - 2(12 - 20) + 3(8 - 12) = 2$

b) $\det(A^t) = 1(18 - 20) - 2(12 - 12) + 4(10 - 9) = 2$

c) Si on fait $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$, on obtient

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 8 & 10 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = 1(48 - 50) - 2(32 - 40) + 3(20 - 24) = 2.$$

5.1.2 Définition générale

Soit A une matrice $n \times n$. On notera $A(i;j)$ la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue de A en éliminant la rangée i et la colonne j.

Exemple 5.1.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A(2;3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A(3;4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons maintenant donner la définition générale.

Définition 5.1.1 Soit A une matrice $n \times n$. Le déterminant de A, noté $\det(A)$, est défini de façon récursive :

(1) Si $n = 1$, i.e. si $A = (\, a_{11} \,)$, alors $\det(A) = a_{11}$.

(2) Soit $n > 1$; alors

$$\det(A) = a_{1,1}(-1)^{1+1}\det(A(1;1)) + a_{1,2}(-1)^{1+2}det(A(1;2)) + \ldots + a_{1,n}(-1)^{1+n}\det(A(1;n)).$$

Cette définition est bien une généralisation de la définition donnée pour $n = 2, 3$. Cependant, nous avions observé que, pour $n = 3$, on pouvait, dans la définition, remplacer la rangée 1 par une autre rangée. On peut aussi la remplacer par n'importe quelle colonne. La démonstration de cette affirmation dans le cas général est assez technique. Nous prendrons donc ce fait pour acquis. Ainsi, pour i, j quelconques entre 1 et n,

$$\boxed{\begin{aligned} \det(A) &= a_{i,1}(-1)^{i+1}\det(A(i;1)) + a_{i,2}(-1)^{i+2}\det(A(i;2)) + \ldots + a_{i,n}(-1)^{i+n}\det(A(i;n)) \\ \det(A) &= a_{1,j}(-1)^{j+1}\det(A(1;j)) + a_{2,j}(-1)^{j+2}\det(A(2,j)) + \ldots + a_{n,j}(-1)^{j+n}\det(A(n;j)) \end{aligned} \quad (5.2)}$$

Définition 5.1.2 Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice $n \times n$, on appelle

a) mineur de $a_{i,j}$, le déterminant de la sous-matrice $A(i;j)$;

b) cofacteur de $a_{i,j}$, noté $C_{i,j}$, le nombre $(-1)^{i+j}\det(A(i;j))$.

Remarque 5.1.1 L'expression $a_{j,1}C_{j,1}+a_{j,2}C_{j,2}+\ldots+a_{j,n}C_{j,n}$ est appelée développement de Laplace du déterminant de A par rapport à la j-ième ligne alors que l'expression $a_{1,i}C_{1,i}+a_{2,i}C_{2,i}+\ldots+a_{n,i}C_{n,i}$ est appelée développement de Laplace du déterminant de A par rapport à la i-ième colonne. Quels que soient i et j, ces expressions ont la même valeur.

Exemple 5.1.3 Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= -2\det(A(4;1)) - 2\det(A(4;2)) - 2\det(4;3) - 2\det(4;4) \\ &= -2(40) - 2(-20) - 2(4) - 2(4) \\ &= -56 \\ \det(A) &= -2\det(A(1;3)) + 4\det(A(2;3)) - 2\det(A(4;3)) \\ &= -2(-8) + 4(-16) - 2(4) \\ &= -56 \end{aligned}$$

5.2 Propriétés du déterminant.

Les propriétés suivantes découlent plus ou moins directement de (5.2).

(D1) $\det(A) = \det(A^t)$.

(D2) Si A contient une ligne ou une colonne de 0, $\det(A) = 0$.

(D3) Si A est triangulaire supérieure ou inférieure,

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

(D4) Si B est obtenue de A par échange de deux rangées,

$$\det(B) = -\det(A).$$

(D5) Si B est obtenue de A par une opération du type $R_i \leftarrow a\,R_i$,

$$\det(B) = a\det(A).$$

(D6) Si B est obtenue de A par une opération du type $R_i \leftarrow R_i + a\,R_j$ avec $i \neq j$,

$$\det(B) = \det(A).$$

(D7) Dans les propriétés (D4), (D5) et (D6), on peut échanger les mots lignes et colonnes.

Remarque 5.2.1 La démonstration de (D4) peut se faire par induction en utilisant un développement de Laplace qui n'implique pas les rangées échangées. La démonstration de (D6) est en tout point identique à celle donnée pour $n = 3$ sauf pour le nombre de termes. (D7) découle évidemment de (D1).

Illustrons ces propriétés sur un exemple.

Exemple 5.2.1

```
> A :=matrix([[1,-2,0,3],[0,2,4,5],[ 1,3,-1,7],[1,-1,0,1]]);det(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$65$$

```
> B :=swaprow(A,2,4);det(B);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$-65$$

```
> C :=mulcol(A,3,-4);det(C);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -16 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-260$$

```
> DD :=addrow(A,2,4,2);det(DD);
```

$$DD := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$65$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que le déterminant est bien un outil approprié pour étudier l'invertibilité des matrices.

Théorème 5.2.1 *Une matrice $A \in M_{n,n}$, est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

Démonstration: Rappelons d'abord que nous avons montré qu'une matrice A peut toujours être ramenée à une matrice triangulaire supérieure par une suite d'opérations élémentaires du type échange de lignes ou remplacement d'une ligne par cette ligne plus un multiple d'une autre. Dans le premier cas, le signe du déterminant change, dans le second cas, le déterminant reste inchangé. Nous avons donc

$$\det(A) = \pm \det(U), \tag{5.3}$$

où U est la matrice triangulaire supérieure qui résulte de l'application de l'algorithme d'élimination. Nous savons aussi que A est inversible si et seulement si U est inversible. Mais U est inversible si et seulement si ses entrées diagonales sont non nulles donc si et seulement si $\det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{i,i} \neq 0$. Le résultat découle alors de (5.3). ∎

Remarque 5.2.2 En fait, nous pourrions préciser l'égalité (5.3) de la façon suivante. Si E est une matrice élémentaire, il découle de (D4), (D5) et (D6) que, si B est obtenue de A par l'une de ces opérations, on a bien

$$B = EA \Rightarrow \det(B) = \det(E)\det(A).$$

Par induction, on obtiendra que

$$\det(A) = \left(\prod_{j=1}^{k} \det(E_j) \right) \det(U),$$

où les E_j sont les inverses des matrices élémentaires qui correspondent aux opérations effectuées dans l'algorithme d'élimination. Si A est inversible, U est équivalente par les rangées à l'identité et peut s'écrire comme un produit de matrices élémentaires. Finalement, on obtient que

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{l} \det(E_j),$$

où les E_j sont les inverses des matrices élémentaires qui correspondent aux opérations effectuées dans l'algorithme de Gauss-Jordan.

Lemme 5.2.1 *Soit A et B deux matrices $n \times n$, alors le produit AB n'est inversible que si A et B le sont.*

Démonstration: Supposons que B ne soit pas inversible. Le système $B\vec{x} = 0$ possède une infinité de solutions qui sont aussi des solutions de $(AB)\vec{x} = 0$. Ceci implique que AB n'est pas inversible.

Supposons maintenant que A n'est pas inversible, mais que B l'est. Le système $A\vec{y} = 0$ possède une infinité de solution. Pour chacune de celles qui sont non nulles, on peut trouver un $\vec{\ } \neq \vec{0}$ tel que $B\vec{x} = \vec{y}$. Donc il existe $\vec{x} \neq 0$ pour lequel $(AB)\vec{x} = 0$ ce qui implique de nouveau que AB n'est pas inversible. ∎

La propriété suivante est la propriété la plus importante du déterminant.

Théorème 5.2.2 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

DÉMONSTRATION: Si A ou B n'est pas inversible, il découle du lemme précédent que AB ne l'est pas non plus et la conclusion découle du théorème 5.2.1.
Si A et B sont inversibles, on peut les écrire comme des produits de matrices élémentaires. En suivant la remarque précédente,

$$AB = \prod_{j=1}^{k} E_j^A \prod_{i=1}^{s} E_i^B \Rightarrow \det(AB) = \prod_{j=1}^{k} \det(E_j^A) \prod_{i=1}^{s} \det(E_i^B) = \det(A)\det(B),$$

ce qui démontre le résultat. ∎

Corollaire 5.2.1 Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Exemple 5.2.2

```
> A :=matrix([[1,-2,0,3],[0,2,4,5],[ 1,3,-1,7],[1,-1,0,1]]);det(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$65$$

```
> B :=matrix([[1,-1,1,3],[-1,2,0,5],[ 1,0,-1,8],[10,-1,3,1]]);det(B);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 8 \\ 10 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$255$$

```
> AB :=evalm(A&*B);det(AB)-det(A)*det(B);
```

$$AB := \begin{bmatrix} 33 & -8 & 10 & -4 \\ 52 & -1 & 11 & 47 \\ 67 & -2 & 23 & 17 \\ 12 & -4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$0$$

```
> C :=inverse(A);det(C)-1/det(A);
```

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-47}{65} & \frac{1}{65} & \frac{4}{65} & \frac{108}{65} \\ \frac{-29}{65} & \frac{2}{65} & \frac{8}{65} & \frac{21}{65} \\ \frac{-8}{65} & \frac{14}{65} & \frac{-9}{65} & \frac{17}{65} \\ \frac{18}{65} & \frac{1}{65} & \frac{4}{65} & \frac{-22}{65} \end{bmatrix}$$

$$0$$

5.3 Sur le calcul du déterminant

Bien que nous ayons défini le déterminant à partir du développement de Laplace, l'évaluation de cette expression devient trop coûteuse dans le cas des grandes matrices. En effet, un raisonnement par induction assez simple montre que pour une matrice de taille n le coût de calcul est proportionnel à $n!$, ce qui est énorme.

Par ailleurs nous avons vu que toute matrice carrée peut s'écrire sous la forme PLU où P est une matrice de permutation dont le déterminant vaut ± 1 alors que L et U sont triangulaires. Les éléments diagonaux de L sont des 1 et le déterminant de U est facile à évaluer. Encore une fois, du point de vue calculatoire, c'est la méthode d'élimination de Gauss qui fournit le calcul le plus économique. Mais, si on l'utilise, pourquoi a-t-on besoin du déterminant ? La question mérite certainement d'être posée.

Exemple 5.3.1

```
> A :=matrix([[1,-2,0,3,7],[0,2,4,5,-6],[ 1,3,-1,7,0],[1,-1,0,1,2],
[0,1,-2,0,3]]);det(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -6 \\ 1 & 3 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$156$$

```
> U :=LUdecomp(A,P='P');
```

$$U := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -11 & \frac{-17}{2} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-65}{22} & \frac{-38}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

```
> print(P);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> product(U[i,i],i=1..5);
```

$$156$$

En fait, comme nous le verrons plus loin, le déterminant est un outil théorique important. Il n'est cependant pas un outil pratique et c'est pour cette raison que nous ne poursuivrons pas son étude.