Chapitre 7

Valeurs et vecteurs propres

7.1 Motivation : Un exemple de dynamique des populations.

Considérons un modèle simple sur l'évolution du divorce dans un milieu fermé. Supposons que dans une ville, 30% des femmes mariées divorcent chaque année alors que 20% des femmes non mariées se marient. Il y a 8000 femmes mariées et 2000 célibataires et la population reste constante (ce qui est évidemment irréaliste). Si les pourcentages de mariage et de divorce restent constants sur une assez longue période, on se demande vers quel état la population va évoluer.

A partir de maintenant, nous représenterons l'état de la population à l'année n, par un vecteur $\vec{x}^n = (x_1^n, x_2^n)$ dont la première composante désigne le nombre de femme mariées et la seconde le nombre de femmes non mariées. Avec ce choix, la relation d'évolution de la population s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{n-1} \\ x_2^{n-1} \end{pmatrix},$$

alors que la donnée initiale est

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix}.$$

L'évolution de la population en fonction de la condition initiale et du nombre d'années devient alors

$$\begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}.$$

Il n'est pas difficile de demander à Maple de faire une petite simulation pour nous. La feuille de travail

```
> v0 := Vector([8000, 2000]);
> A := Matrix(2, 2, [0.7, 0.2, 0.3, 0.8]);
> for i from 1 to NN do
    v0 := evalf(A*v0,20);
    od :
> print (v0);
```

conduit aux résultats suivants arrondis à l'entier le plus proche

$$NN = 10 \quad (4004, 5996)^t$$

$$NN = 20 \quad (4000, 6000)^t$$

$$NN = 30 \quad (4000, 6000)^t$$

La population semble donc évoluer vers un état stationnaire de 4000 femmes mariées et 6000 non mariées. D'ailleurs si nous remplaçons la donnée initiale par ce vecteur, la population à l'étape suivante reste la même, i.e.

$$\begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

On peut se demander si on atteint le même état stationnaire pour toutes les populations de départ. En fait, le choix $x_1^0 = 10000, x_2^0 = 0$ conduit à $x_1^{14} = 4000, x_2^{14} = 6000$ et d'autres choix conduiront au même résultat après suffisamment d'années.
Il y a une façon simple de générer d'autres états stationnaires, il suffit de multiplier les deux membres de l'égalité (7.1) par une constante ; elle restera vraie ! Ceci signifie que, si (x, y) est un état stationnaire, $\alpha(x, y)$ est un état stationnaire pour tout α. Ainsi, avec $\alpha = 1/1000$,

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Abandonnons maintenant notre situation de départ et limitons nous à l'algèbre. Dans ce cas, les composantes des vecteurs peuvent être négatives. Ainsi, pour le vecteur $(-1, 1)^t$ on obtient

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

n répétitions de ce calcul conduiront à

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

un vecteur qui devient très petit mais dont la direction reste toujours inchangée. Est-ce parce que nous avons une composante négative que nous observons cela ? Et bien non !

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}^{150} \begin{pmatrix} -0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.12 \end{pmatrix} = 0.02 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Le vecteur obtenu est en fait un multiple du premier état stationnaire. Cette matrice semble donc avoir deux directions privilégiées, les directions de $(4,6)$ et $(-1,1)$ qui ne sont pas affectées par la multiplication par A. En plus la première direction semble plus attractive que la seconde.
Avant de regarder ça de plus près donnons une définition.

Définition 7.1.1 On dira qu'un nombre réel α est une valeur propre d'une matrice $A \in M_{n,n}$ s'il existe un vecteur non nul $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$A\vec{x} = \alpha\vec{x}. \tag{7.2}$$

Le vecteur $\vec{x}$ est alors appelé vecteur propre associé à la valeur propre α.

Un vecteur propre a donc une direction privilégiée par la matrice alors que la valeur propre représente le facteur d'étirement (ou de compression) dans cette direction.
Pour la matrice précédente, nous avons trouvé deux valeurs propres 1 et 0.5 et des vecteurs propres associés. Montrons qu'il n'y a pas d'autres directions privilégiées. Les vecteurs propres $\vec{u} = (4,6)^t$ et $\vec{v} = (-1,1)^t$ sont indépendants ; donc, tout vecteur $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ peut sécrire $\vec{a} = a_u\vec{u} + a_v\vec{v}$. $\vec{a}$ sera un vecteur propre si, il existe γ pour lequel

$$\gamma\vec{a} = \gamma a_u\vec{u} + \gamma a_v\vec{v} = A\vec{a} = a_u A\vec{u} + a_v A\vec{v} = a_u\vec{u} + \frac{1}{2}a_v\vec{v}.$$

A cause de l'indépendance de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, cette égalité n'est possible que si $\gamma a_u = a_u$ et $\gamma a_v = \frac{1}{2}a_v$. Si $a_u \neq 0$, ceci implique $\gamma = 1$ et donc $a_v = 0$. C'est à dire $\vec{a} = a_u\vec{u}$. Si plutôt $a_u = 0$ alors $a_v \neq 0$ donc $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\vec{a} = a_v\vec{v}$. On en déduit que les vecteurs propres doivent être des multiples de $\vec{u}$, auquel cas ils sont associés à la valeur propre 1, ou de $\vec{v}$, auquel cas ils sont associés à la valeur propre $\frac{1}{2}$. Ce raisonnement est général et ne dépend ni des entrées de A ni des valeurs numériques des valeurs propres en autant qu'elles soient distinctes.
Examinons maintenant la raison pour laquelle la direction de $(4,6)$ est plus attractive. Reprenons un vecteur $\vec{a} = a_u\vec{u} + a_v\vec{v}$ arbitraire. On a

$$A^n\vec{a} = a_u\vec{u} + a_v\left(\frac{1}{2}\right)^n\vec{v},$$

quand n devient grand, la composante de $A^n\vec{a}$ dans la direction $\vec{u}$ reste inchangée alors que celle dans la direction $\vec{v}$ devient négligeable. C'est donc dire que les images successives de $\vec{a}$ par A deviennent de plus en plus parallèles à $\vec{u}$ et tout ceci parce que la valeur propre 1 domine la valeur propre 1/2. Cette idée est importante et peut être mise à profit pour calculer des valeurs propres de grandes matrices. Nous y reviendrons.

7.2 Caractérisation algébrique des valeurs propres.

En vertu de (7.2), dire que α est une valeur propre de A, c'est dire que le système homogène

$$(A - \alpha I)x = 0, \tag{7.3}$$

possède une solution non nulle ou encore que $A - \alpha I$ est une matrice non inversible. Ceci ne peut se produire que pour les nombres α pour lesquels

$$p(\alpha) = \det(A - \alpha I) = 0. \tag{7.4}$$

La clé ici réside dans la nature de la fonction $p(\alpha)$. Demandons un coup de main à Maple.

$> \; A := Matrix(4, 4, []) : II := array(identity, 1..4, 1..4) :$

$> \; pol := Determinant((A - alpha * II));$

$> \; type(pol, polynom);$

$\qquad true$

$> \; degree(pol, alpha);$

$\qquad 4$

On voit que Maple identifie p comme un polynôme en α de degré 4. En général, (7.4) définit un polynôme de degré n à coefficients réels appelé polynôme caractéristique de A. Nous obtenons ainsi une première proposition à caractère calculatoire.

Proposition 7.2.1 *Soit $A \in M_{n,n}$; les énoncés suivants sont équivalents :*

a) α est une valeur propre de A et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé ;

b) α est une racine réelle du polynôme caractéristique et x une solution du système homogène (7.3).

Examinons des cas particuliers.

Exemple 7.2.1

Soit

$$A := \begin{pmatrix} 0.82 & 0.24 \\ 0.24 & 0.68 \end{pmatrix},$$

On a

$$\det(A - \alpha I) = \det \begin{pmatrix} 0.82 - \alpha & 0.24 \\ 0.24 & 0.68 - \alpha \end{pmatrix} = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right).$$

Les valeurs propres sont donc $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = \frac{1}{2}$.
Pour trouver les vecteurs propres associés, nous cherchons les espaces solutions des deux systèmes homogènes

$$\begin{pmatrix} 0.82-1 & 0.24 \\ 0.24 & 0.68-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.82-\frac{1}{2} & 0.24 \\ 0.24 & 0.68-\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'application de la commande > *kernel* aux deux matrices nous donne comme base de leur noyau respectif $u_1 = (\dfrac{4}{3}, 1)^t$ et $u_2 = (1, -\dfrac{4}{3})^t$. Tous les autres vecteurs propres sont des multiples de ces deux là. Notons, pour mémoire, que ces deux vecteurs sont orthogonaux.

Exemple 7.2.2

Soit maintenant

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A - \alpha I) = \det \begin{pmatrix} 2-\alpha & -3 & 1 \\ 1 & -2-\alpha & 1 \\ 1 & -3 & 2-\alpha \end{pmatrix} = -\alpha(\alpha-1)^2.$$

Nous avons encore trois valeurs propres 0, 1 et 1 cette dernière situation correspondant au fait que la racine 1 est double. Pour trouver les vecteurs propres, nous formons les systèmes homogènes

$$\begin{pmatrix} 2-\alpha & -3 & 1 \\ 1 & -2-\alpha & 1 \\ 1 & -3 & 2-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

correspondant à $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

Dans le premier cas, la matrice augmentée du système est

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & |\,0 \\ 1 & -2 & 1 & |\,0 \\ 1 & -3 & 2 & |\,0 \end{pmatrix},$$

et sa forme échelon est

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & |\,0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & |\,0 \\ 0 & 0 & 0 & |\,0 \end{pmatrix}.$$

L'espace des solutions du système échelon est de la forme (z, z, z) c'est un espace de dimension 1 engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$.

Dans le second cas, la matrice augmentée du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & |\,0 \\ 1 & -3 & 1 & |\,0 \\ 1 & -3 & 1 & |\,0 \end{pmatrix},$$

et sa forme échelon

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

L'espace des solutions du système échelon est de la forme $(3y - z, y, z)$. C'est un espace de dimension 2 engendré par les vecteurs $(3, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$.
Ces exemples nous conduisent d'abord à la version plus précise suivante de la proposition (7.2.1).

Théorème 7.2.1 *Soit $A \in M_{n,n}$. Les énoncés suivants sont équivalents*

a) *λ est une valeur propre réelle de A.*

b) *Le système homogène $(A - \lambda I)x = 0$ possède une solution non nulle.*

c) $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$.

d) *$A - \lambda I$ n'est pas inversible.*

e) *$det\,(A - \lambda I) = 0$.*

Il reste cependant à préciser la différence entre les exemples (7.2.1) et (7.2.2).

Définition 7.2.1 Soit $A \in M_{n,n}$, on dit que λ est une valeur propre réelle de multiplicité $k \leq n$ de A si λ est une racine de multiplicité k de son polynôme caractéristique. L'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre donnée ($= \ker(A - \lambda I)$) est appelé espace propre associé.

Proposition 7.2.2 *Soit $A \in M_{n,n}$ et λ une valeur propre réelle de multiplicité $k \leq n$, la dimension de l'espace propre associé est au moins 1 et au plus k.*

Définition 7.2.2 Soit $A \in M_{n,n}$, et λ une valeur propre réelle de multiplicité $k \leq n$ de A. Si la dimension de l'espace propre est strictement inférieure à k, la valeur propre est dite dégénérée.

Proposition 7.2.3 *Soit $A \in M_{n,n}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ k valeurs propres réelles distinctes. Si $u_1, \ldots, u_k$ sont des vecteurs propres associés séparément à chacun des λ_i, ils sont linéairement indépendants.*

DÉMONSTRATION: Nous ne considérons que le cas, $k = 2$. Si u_2 est un multiple de u_1, on a

$$\lambda_2 u_2 = A u_2 = A\alpha u_1 = \alpha A u_1 = \alpha\lambda_1 u_1 = \alpha\lambda_1 \frac{1}{\alpha} u_2 = \lambda_1 u_2.$$

Puisque $u_2 \neq 0$ ceci entraine que $\lambda_1 = \lambda_2$ en contradiction avec l'hypothèse. u_2 ne peut donc être un multiple de u_1 et ces vecteurs sont indépendants. ■

Cette proposition a un corollaire important.

Corollaire 7.2.1 Si une matrice $A \in M_{n,n}$ possède n valeurs propres distinctes, l'ensemble des vecteurs propres associés forment une base.

Exemple 7.2.3

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Les valeurs propres de cette matrice sont $0, 1, 2$. Les vecteurs propres associés sont $u_1 = (1, 1, 1)^t$, $u_2 = (3, 2, 1)^t$, $u_3 = (7, 3, 1)^t$. Pour vérifier qu'ils sont linéairement indépendants, il suffit de calculer le déterminant de la matrices $U = [u_1|u_2|u_3]$ ce qui donne -2. Ce déterminant étant différent de 0, la matrice est inversible, donc de rang 3. Par ailleurs, nous avons vu que la matrice représentative de la transformation linéaire T_A associée à la matrice A pouvait s'écrire dans la base S des vecteurs propres

$$[T_A]_S = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonale et ses entrées diagonales sont les valeurs propres. Ce résultat est général et jouera un grand rôle dans la suite.

7.3 Les matrices semblables.

Rappelons qu'on appelle semblable deux matrices $A, B \in M_{n,n}$ pour lesquelles il existe une matrice inversible Q telle que
$$B = Q^{-1}AQ \tag{7.5}$$
En outre, nous avons vu que, si A est la matrice représentative d'une transformation linéaire T dans la base canonique E de $\mathbb{R}^n$, alors B est la matrice représentative de **la même** transformation dans la base S dont les éléments sont les vecteurs colonnes de Q. En particulier, si $u \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ, on a $T(u) = Au = \lambda u$, i.e. que l'image de u par T est parallèle à u. Mais cette propriété ne dépend pas de la base dans laquelle on représente u et $T(u)$, donc, si $[u]_S$ est le vecteur des coordonnées de u dans la base S, on devrait aussi avoir

$$[T(u)]_S = B[u]_S = \lambda[u]_S.$$

Vérifions ce fait. Nous savons que pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$,

$$v = Q[v]_S, \quad \text{donc } [v]_S = Q^{-1}v.$$

Ainsi
$$B[u]_S = [T(u)]_S = Q^{-1}T(u) = Q^{-1}Au = Q^{-1}\lambda u = \lambda Q^{-1}Q[u]_S = \lambda[u]_S.$$

Il en découle la proposition suivante.

Proposition 7.3.1 *Soit $\mathcal{Q} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et Q la matrice dont les colonnes sont les $\vec{q}_i$. Soit $A, B \in M_{n,n}$ deux matrices satisfaisant $A = Q^{-1}\, B\, Q$, alors λ est une valeur propre de A si et seulement si elle est une valeur propre de B. En outre, si u est un vecteur propre de A associé à λ, alors $[u]_{\mathcal{Q}}$ est un vecteur propre de B pour la même valeur propre.*

En fait, il est très utile de bien comprendre que, ce qui change lorsqu'on passe de A à B, ce n'est pas le vecteur géométrique, mais plutôt ses coordonnées, qui dépendent de la base dans laquelle on le représente.

Exemple 7.3.1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ et }, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La feuille Maple suivante

```
> with(LinearAlgebra)) :
> A := Matrix (2, 2, [1, 2, 2, 3]);
> Q := Matrix (2, 2, [1, −1, 1, 1]);
> B := MatrixInverse(Q)& ∗ A& ∗ Q);
> Eigenvectors (A);
> Eigenvectors (B);
```

fournit les mêmes valeurs propres $2 \pm \sqrt{5}$ pour les deux matrices et

$$\ker(A - (2+\sqrt{5})I) = \{(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 1)^t\},\ \ker(A - (2-\sqrt{5})I) = \{(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 1)^t\},$$
$$\ker(B - (2+\sqrt{5})I) = \{(2+\sqrt{5}, 1)^t\},\ \ker(B - (2-\sqrt{5})I) = \{(2-\sqrt{5}, 1)^t\}.$$

Considérons le cas de la première valeur propre de A. La comparaison des vecteur propres de A et B demande un peu d'attention, car les vecteurs propres produits par Maple ne sont pas normalisés. On veut donc savoir s'il existe un réel α pour lequel

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \left((2+\sqrt{5}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ceci sera vrai si la "pente "du membre de gauche coïncide avec celle du membre de droite, i.e. si

$$\frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}.$$

Un calcul élémentaire montre que cette égalité est vérifiée.

7.4 Diagonalisation

Nous avons vu à l'exemple (7.2.3) que le calcul des valeurs et vecteurs propres nous a permis de trouver une matrice diagonale, semblable à la matrice de départ. Cette observation est pleine d'intérêt pour plusieurs raisons. L'une d'elle concerne l'exemple présenté, comme motivation, au début de ce chapitre. Dans cet exemple, on calcule les puissances successives d'une matrice. Mais si A et B sont semblables

$$A = QBQ^{-1} \Rightarrow A^2 = QBQ^{-1}QBQ^{-1} = QB^2Q^{-1} \Rightarrow \ldots A^k = QB^kQ^{-1}.$$

En plus, si B est diagonale, $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$, on a $B^k = \operatorname{diag}(b_1^n, \ldots, b_n^k)$. En combinant ces deux remarques, on voit que, si on peut factoriser une matrice sous la forme

$$A = QDQ^{-1}, \tag{7.6}$$

avec D une matrice diagonale, le calcul des puissances est grandement simplifié.

Exemple 7.4.1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4\alpha - 3\beta & -3\alpha + 3\beta \\ 4\alpha - 4\beta & -3\alpha + 4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha = \beta$, A est diagonale et le calcul de ses puissance est immédiat. Sinon, sans la factorisation, le travail sera ardu. Par contre, si nous en faisons usage, nous voyons directement que

$$A^{100000} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{100000} & 0 \\ 0 & \beta^{100000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha^{100000} - 3\beta^{100000} & -3\alpha^{100000} + 3\beta^{100000} \\ 4\alpha^{100000} - 4\beta^{100000} & -3\alpha^{100000} + 4\beta^{100000} \end{pmatrix}.$$

Compte tenu de ce que nous avons montré à la section précédente, dans (7.6), les entrées de D, qui sont ses valeurs propres, sont aussi les valeurs propres de A, alors que les vecteurs propres doivent être les colonnes de la matrice Q. Précisons ce point. Si q_i désigne le ième vecteur colonne de Q, en vertu de (7.6), on a

$$AQ = QD, \Rightarrow Aq_i = d_i q_i.$$

et q_i est bien un vecteur propre associé à la valeur propre d_i. Mais, (7.6) n'a de sens que si le rang de Q est n i.e. si les q_i sont indépendants. En particulier, une **condition nécessaire** pour que (7.6) soit vérifée est que la matrice A possède n vecteurs propres linéairement indépendants. Il n'est pas trop difficile de montrer que cette condition est aussi suffisante (il suffit de renverser le raisonnement précédent) et donc que la proposition suivante est vraie.

Proposition 7.4.1 *Soit $A \in M_{n,n}$, alors A est* **diagonalisable** *c'est-à-dire qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible Q pour lesquelles (7.6) est vérifiée, si et seulement si A possède n vecteurs propres linéairement indépendants.*

Exemple 7.4.2

L'exemple suivant dans lesquels les calculs sont faits par Maple, illustre bien notre propos.

```
> with(LinearAlgebra) :
> Q :=Matrix(4,4,[1,2,-3,4,2,3,5,6,-3,5,6,7,4,6,7,1]) ;
```

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ -3 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> DD :=DiagonalMatrix(1,2,3,4) ;
```

$$DD := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> A :=Q.DD.MatrixInverse(Q)) ;
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{3647}{1307} & \frac{1042}{1307} & \frac{152}{1307} & \frac{-992}{1307} \\ \frac{-461}{1307} & \frac{5283}{1307} & \frac{437}{1307} & \frac{-1545}{1307} \\ \frac{-306}{1307} & \frac{4207}{1307} & \frac{2011}{1307} & \frac{-1499}{1307} \\ \frac{-1549}{1307} & \frac{491}{1307} & \frac{907}{1307} & \frac{2129}{1307} \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvectors(A) ;
```

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3/7 & 1/3 & 4 & 1/4 \\ 5/7 & 1/2 & 6 & 1/2 \\ 6/7 & 5/6 & 7 & -3/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Faisons quelques commentaires sur le format de sortie. Le premier vecteur contient la *liste* des valeurs propres. Les colonnes de la matrice sont les vecteurs propres associé placées dans le même ordre que les valeurs propres.

Il est aussi important de noter que, si une valeur propre était multiple (i.e. qu'elle apparaissait plusieurs fois dans DD), il faudrait qu'il y ait autant de vecteurs propres que la multiplicité pour que la matrice Q soit $n \times n$, d'où la nécessité d'avoir une base.

Exemple 7.4.3

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a une valeur propre $\alpha = 0$ de multiplicité 2. Cette valeur propre est dégénérée car les seuls vecteurs propres sont les multiples de $u = (0, 1)$. Une telle matrice ne peut pas être diagonalisable.

En résumé, *pour qu'une matrice soient diagonalisable, il faut qu'elle possède n valeurs propres réelles (comptées autant de fois que leur multiplicité) et qu'aucune de ces valeurs propres ne soient dégénérées.*

7.5 Matrices symmétriques.

Nous voudrions maintenant restreindre notre attention à une classe de matrices qui joue un rôle important dans beaucoup d'applications et pour laquelle le problème des valeurs propres se trouve simplifié : la classe des matrices symétriques i.e. celles pour lesquelles $A^t = A$.

Pour guider notre intuition, nous allons commencer par le cas $n = 2$ Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

une matrice symétrique. Son polynôme caractéristique s'écrit

$$p(\alpha) = \alpha^2 - (a + d)\alpha + ad - b^2.$$

Le discriminant de ce polynôme

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - b^2) = a^2 + d^2 - 2ad + 4b^2 = (a - d)^2 + 4b^2,$$

est toujours positif ou nul. S'il est nul, $a = d, b = 0$ et A est un multiple de I, elle possède alors une valeur propre double réelle ($= a$) et deux vecteurs propres linéairement indépendants $(0, 1)$ et $(1, 0)$ (vérifier !). Sinon, $\Delta > 0$ et A possède nécessairement deux valeurs propres réelles distinctes et donc une base de vecteurs propres linéairement indépendants. Il découle donc de la proposition 7.4.1 que A est diagonalisable.

Considérons maintenant le cas $n = 3$. Le polynôme caractéristique de A est de degré 3 et doit donc posséder une racine réelle, ce qui implique que la matrice a au moins une valeur propre réelle α et un vecteur propre u associé de norme 1. Nous pouvons, à partir de ce vecteur construire une base $S = \{u, v, w\}$ orthonormée. Dans ce cas, la matrice de passage Q sera orthogonale.
Nous savons que $Au = \alpha u$. Par ailleurs, la première coordonnée de Av dans la base S est donnée par $Av \cdot u = v \cdot A^t u = \alpha v \cdot u = 0$ et de même pour w. Il en découle que la matrice représentative de A dans la base S sera de la forme

$$[A]_S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ = Q^t AQ, \tag{7.7}$$

où nous avons utilisé le fait que Q est orthogonale pour remplacer Q^{-1} par Q^t. Le membre de droite de (7.7) est une matrice symétrique, il faut donc que $[A]_S$ soit aussi symétrique et donc que $b = c$. Puisque le polynôme caractéristique de $[A]_S$ s'écrit

$$p(\lambda) = (\alpha - \lambda)\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & d - \lambda \end{pmatrix},$$

nous pouvons maintenant invoquer le résultat obtenu pour les matrices 2×2 pour affirmer que les deux autres racines de p sont réelles. Si $b = 0$ et $a = d$ nous avons une valeur propre double non dégénérée et deux vecteurs propres indépendants que l'on peut, par le procédé de Gramm-Schmidt, remplacer par deux vecteurs propres orthogonaux. Sinon nous avons deux valeurs propres distinctes auxquelles sont associés deux vecteurs déjà orthogonaux que l'on peut normaliser.

Dans le cas général, le raisonnement précédent ne tient plus car un polynôme de degré grand n'a pas nécessairement une racine réelle. Malgré tout, il nous reste quelque chose.

Proposition 7.5.1
Soit $A \in M_{n,n}$ une matrice symétrique. Si u et v sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres disctinctes, ils sont orthogonaux.

Démonstration : Soit λ et α les deux valeurs propres. On a

$$\lambda(u \cdot v) = Au \cdot v = u \cdot A^t v = u \cdot Av = u \cdot \alpha v = \alpha(u \cdot v).$$

Puisque $\lambda \neq \alpha$, il faut que $(u \cdot v) = 0$. ∎

Cette proposition, l'idée d'induction utilisée pour passer du cas $n = 2$ au cas $n = 3$ et les remarques de la section précédente sont parmi les ingrédients utilisés pour démontrer le théorème suivant.

Théorème 7.5.1 *Si $A \in M_{n,n}$ est une matrice symétrique, les énoncés suivants sont vrais.*

a) *Toutes les valeurs propres de A sont réelles et il existe une base orthonormée de vecteurs propres.*
b) *Il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale Q pour lesquelles*

$$A = Q^t D Q.$$

Démonstration: Nous avons démontré a) dans les cas $n = 2, 3$. Nous nous contenterons de cela. Prenant a) pour acquis, désignons par Q la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres et par D la matrice diagonale dont les entrées sont les valeurs propres. Les égalités $A\, q_i = d_i\, q_i, i = 1, \ldots, n$ se traduisent matriciellement par

$$AQ = DQ.$$

Or Q étant orthogonale, $Q^{-1} = Q^t$ et en multipliant les deux membres de l'égalité précédente par Q^t, on obtient le résultat désiré. ∎

Exemple 7.5.1

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Les commandes

$>$ $A := \mathrm{matrix}\,(4, 4, [1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6, 4, 5, 6, 7]);$
$>$ $p := \mathrm{charpoly}\,(A, \alpha);$
$>$ $factor(p);$

conduisent à

$$p(\alpha) = \alpha^2(\alpha^2 - 16\alpha - 20).$$

Il y a donc une valeur propre double $\alpha = 0$ (en particulier la matrice est singulière) et deux valeurs propres simples $\alpha = 8 \pm 2\sqrt{21}$.
La commande

$$> \ker(A);$$

fournit alors

$$\{(1, -2, 1, 0)^t, (2, -3, 0, 1)^t\}.$$

On obtient ainsi deux vecteurs linéairement indépendants mais non orthogonaux. En appliquant Gram-Schmidt à cette paire, nous pouvons les remplacer par la paire

$$\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 1, 0)^t, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1)^t\}.$$

Les deux autres vecteurs propres sont

$$\frac{1}{\sqrt{63 - 13\sqrt{21}}}(-4+\sqrt{21}, -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}, 1, \frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21})^t, \frac{1}{\sqrt{63 + 13\sqrt{21}}}(-4-\sqrt{21}, -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}, 1, \frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21})^t.$$

L'ensemble de ces quatre vecteurs forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ et on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 + 2\sqrt{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 - 2\sqrt{21} \end{pmatrix} Q^t,$$

où les colonnes de Q sont les quatres vecteurs propres.
Nous pouvons ainsi résumer notre algorithme

Algorithme 7.5.1

Diagonalisation d'une matrice symétrique A

a) *Construire le polynôme caractéristique*

$$p(\alpha) = \det (A - \alpha I).$$

b) *Calculer toutes les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de p en notant leur multiplicité.*

c) *Construire la matrice diagonale des valeurs propres, répétées autant de fois que leur multiplicité.*

d) *Pour chaque valeur propre, résoudre le système homogène*

$$(A - \alpha_j I)x = 0,$$

pour trouver une base de l'espace propre $\ker(A - \alpha_j I)$. *Si la valeur propre est multiple, appliquer GramSchmidt à la base obtenue. Si la valeur propre est simple, normaliser le vecteur de base.*

e) *Construire la matrice orthogonale Q dont les colonnes sont les vecteurs de base des espaces propres, placés dans le même ordre que les valeurs propres.*

Exemple 7.5.2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

a)

$$p = (\alpha - 1)(\alpha^2 - 10\alpha - 3).$$

b) Les racines de p sont $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 5 + 2\sqrt{7}$, $\alpha_3 = 5 - 2\sqrt{7}$. Elles sont simples.

c)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 + 2\sqrt{7} & 0 \\ 0 & 0 & 5 - 2\sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

d) En travaillant sur les trois systèmes augmentés

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 - 2\sqrt{7} & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -3 - 2\sqrt{7} & -4 & 0 \\ 2 & -4 & 2 - 2\sqrt{7} & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4+2\sqrt{7} & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -3+2\sqrt{7} & -4 & 0 \\ 2 & -4 & 2+2\sqrt{7} & 0 \end{array}\right),$$

on obtient, après normalisation des résultats, les vecteurs unitaires

$$\{(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})^t,$$
$$(\tfrac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{28-10\sqrt{7}}}, \tfrac{2-\sqrt{7}}{\sqrt{28-10\sqrt{7}}}, \tfrac{1}{\sqrt{28-10\sqrt{7}}})^t,$$
$$(\tfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{28+10\sqrt{7}}}, \tfrac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{28+10\sqrt{7}}}, \tfrac{1}{\sqrt{28+10\sqrt{7}}})^t\}.$$

e) Dans la matrice Q l'ordre des vecteurs propres est dicté par celui des valeurs propres dans D.

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{28-10\sqrt{7}}} & \frac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{28+10\sqrt{7}}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2-\sqrt{7}}{\sqrt{28-10\sqrt{7}}} & \frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{28+10\sqrt{7}}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{28-10\sqrt{7}}} & \frac{1}{\sqrt{28+10\sqrt{7}}} \end{pmatrix}$$

L'application de cet algorithme dépend bien sûr de notre capacité à franchir l'étape 2. Pour les matrices d'ordre plus grand que quatre c'est souvent impossible alors que pour les matrices d'ordre 3 et 4, ce peut être assez difficile. Le cas $n = 2$ reste le plus simple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a)

$$p = \alpha(\alpha - 5).$$

b) Les racines de p sont $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 5$ Elles sont simples.

c)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

d) On travaille sur les deux systèmes augmentés

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

puis on normalise.

Les vecteurs obtenus sont

$$\{(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})^t, (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})^t\}$$

e) La matrice Q

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

On a donc la factorisation

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

En particulier, il est facile d'en déduire (exercice !) que

$$A^n = 5^{n-1}A.$$