MAT 1200: Introduction à l'algèbre linéaire

Robert Guénette et Saïd EL MORCHID

Département de Mathématiques et de Statistique

Chapitre 5: Les Déterminants

Références:

- Notes de cours chapitre 5 .
- Livre: Chapitre 3 page 175

Déterminants d'ordre 1 et 2

Définitions

1. **Cas d'une matrice 1×1:**
   Soit $A = (a_{11})$ une matrice de type 1×1, le déterminant de A est

$$\det(A) = | a_{11} | = a_{11}$$

2 **Cas d'une matrice 2×2:**
   Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est le nombre réel

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemple

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminants d'ordre n

Définition générale

On définit le déterminant par la formule

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma=(j_1,\dots,j_n)\in P_n} sign(\sigma)\ a_{1,j_1}\ a_{2,j_2}\ a_{3,j_3} \dots a_{n,j_n}$$

où P_n est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et $sign(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$ est la signature de σ. Le nombre $N(\sigma)$ est défini comme le nombre d'inversions parmi l'ensemble de tous les couples $\{(\sigma_i, \sigma_j) \mid i < j\}$.

Par exemple: si $n = 3$ et $\sigma = (3, 1, 2)$, on compte le nombre d'inversions parmi l'ensemble des couples

$$(31)(32)(12) \Rightarrow N(\sigma) = 2 \Rightarrow sign(\sigma) = 1$$

Conséquences immédiates de la définition

Personne ne songerait à utiliser cette définition pour évaluer un déterminant d'ordre plus élevé car fait intervenir une somme de n termes ce qui est impraticable. Son intérêt est purement théorique et permet de dégager rapidement les propriétés du déterminant.

- Linéarité par rapport à une ligne

$$\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + T_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

- Multiplication d'une ligne par un nombre réel c

$$\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ c\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = c\ \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

Conséquences immédiates (suite)

- Si la matrice B est obtenue à partir de la matrice A en permutant 2 lignes, alors $\det B = -\det A$.
- Si A possède une ligne nulle, alors $\det A = 0$.
- Si A contient deux lignes identiques, alors $\det A = 0$.
- Si A est une matrice triangulaire inférieure ou supérieure d'ordre n, alors

$$\det A = a_{11}\ a_{22}\ a_{33} \dots a_{nn} = \text{ le produit de la diagonale}$$

- Si la matrice B est obtenue à partir de la matrice A en appliquant l'opération élémentaire $c\ L_i + L_j \to L_j$, alors $\det B = \det A$.

Exemple

Evaluer le déterminant en appliquant des opérations élémentaires sur les lignes, i.e. par élimination de Gauss

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Déterminant d'un produit et matrices inversibles

Proposition:

Si E est une matrice élémentaire, on a que

$$\det EA = \det E \det A$$

Par induction, on obtient le résultat suivant.

Corollaire:

$$\det(E_1 E_2 \dots E_k A) = \det E_1 \det E_2 \dots \det E_k \det A$$

Théorème:

Une matrice carrée B est inversible si et seulement si $\det B \neq 0$.

Théorème:

Soit A et B deux matrices carrées. On a que

$$\det(AB) = \det A \times \det B$$

Déterminant de la matrice transposée

Théorème:

Soit A une matrice carrée. On a que

$$\det A^t = \det A$$

Conséquence: opérations sur les colonnes

Soit A une matrice carrée.

a) Si une matrice B est obtenue en ajoutant à une colonne de la matrice A un multiple d'une autre de ses colonnes, alors $\det B = \det A$.

b) Si B est la matrice obtenue en permutant deux colonnes de A, alors $\det B = -\det A$.

c) Si B est la matrice obtenue en multipliant une colonne de A par k, alors $\det B = k\det A$.

Exemple:

Calculer le déterminant de la matrice par des opérations élémentaires sur les colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les déterminants et les matrices inversibles

Théorème:

- Une matrice carrée est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
- Si A est une matrice carrée inversible, alors

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Exemple:

Est ce que la matrice suivante est inversible? Si oui, calculer $\det A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Théorème:

• Soient $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n}$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et A la matrice dont les colonnes ou les lignes sont les vecteurs $\vec{u_i}$. Alors $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n}$ sont indépendants si et seulement si le déterminant de A est non nul.

Sous-matrices A_{ij} et mineurs M_{ij}

Mineur

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de type $n \times n$. Alors la matrice A_{ij} de type $(n-1) \times (n-1)$ désigne la sous-matrice formée des éléments de A qui restent après avoir supprimé la $i^{-ème}$ ligne et la $j^{-ème}$ colonne.
Le déterminant de la sous-matrice A_{ij} est appelé **le mineur** de a_{ij} et est noté par M_{ij}.

Exemple

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver les sous-matrices A_{32}, A_{43} et calculer M_{32}, M_{43}.

Cofacteur

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de type $n \times n$. On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij} le nombre

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Exemple

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver les cofacteurs C_{21}, C_{22} et C_{23}.

Exemple:

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice $n \times n$

Définition

Le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type $n \times n$ est

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n} \\ &= a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots \\ &\quad +(-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}\end{aligned}$$

On dit qu'on a développé le déterminant par rapport à la première ligne.

Exemple:

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Théorème:

Le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type $n \times n$ peut être calculé par un développement selon n'importe quelle ligne ou selon n'importe quelle colonne.

• Le développement selon la $i^{-ème}$ ligne s'écrit:

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

• Le développement selon la $j^{-ème}$ colonne s'écrit:

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

Exemple:

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice des cofacteurs. Matrice adjointe

Définition:

• Soit A une matrice carrée de type $n \times n$. La matrice des cofacteurs de A, notée $\mathrm{Cof}(A)$, est la matrice obtenue de A en remplaçant chaque terme a_{ij} par son cofacteur. On a

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition:

• La matrice adjointe de A, notée $\mathrm{adj}A$, est la transposée de la matrice des cofacteurs de A. On a

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème: Une Formule de l'inverse

Soit A une matrice inversible de type $n \times n$. Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{adj}A).$$

Exemple:

Calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

La règle de Cramer pour résoudre un système

Dans cette section, on considère

- A une matrice inversible de type $n \times n$,
- $\vec{b}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$,
- $A_i(\vec{b})$ la matrice obtenue en remplaçant dans A la $i^{-ème}$ colonne par le vecteur $\vec{b}$.
- (S) le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$.

Théorème: La règle de Cramer

Les composantes de l'unique solution du système (S) sont données par

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \quad i = 1, 2 \cdots, n$$

Exemple

Résoudre par le règle de Cramer les systèmes

$$(S_1) \begin{cases} 3x - 2y & = & 6 \\ -5x + 4y & = & 8 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} 2x + y + 3z & = & 2 \\ x - y + z & = & 1 \\ x + 4y - 2z & = & -1 \end{cases}$$