MAT 1200: Introduction à l'algèbre linéaire

Saïd EL MORCHID

Département de Mathématiques et de Statistique

Chapitre 6: Les transformations géométriques

Références

Cas de dimension 2

- La translation
- La rotation d'un angle α autour de l'origine
- La dilatation ou le rétrécissement
- Les symétries dans le plan
  - La symétrie orthogonale d'axe OX
  - Symétrie orthogonale d'axe OY
  - Symétrie orthogonale d'axe la droite $y = x$
  - Symétrie orthogonale d'axe la droite $y = -x$:
  - Symétrie centrale de centre O:

Cas de dimension 3

- La translation
- La dilatation ou le rétrécissement
- La rotation autour d'un axe
- La projection sur une droite passant par O:
- La projection sur une plan passant par O et engendré par deux vecteurs orthogonaux:

Références:

- Notes de cours chapitre 6 page 112 .
- Livre: section 1.8. pages 68-86.

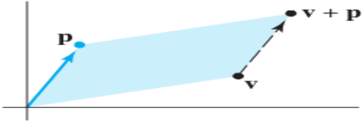
Cas de dimension 2

La translation

La translation par un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, notée $t_{\vec{a}}$ est une application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, qui à chaque vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ associe

$$\vec{w} = t_{\vec{a}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 + a_1 \\ v_2 + a_2 \end{pmatrix}.$$

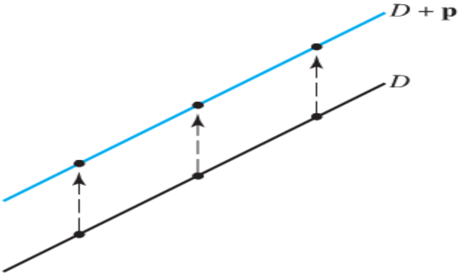
Représentation graphique.



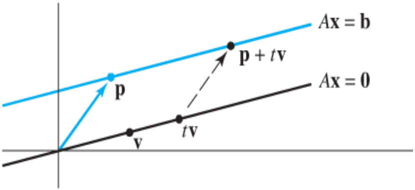
Ajouter **p** à **v** effectue sur **v** la translation de vecteur **p**.

Alerte 1

La translation n'est pas linéaire.



Translation d'une droite



Les ensembles de solutions de
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sont parallèles.

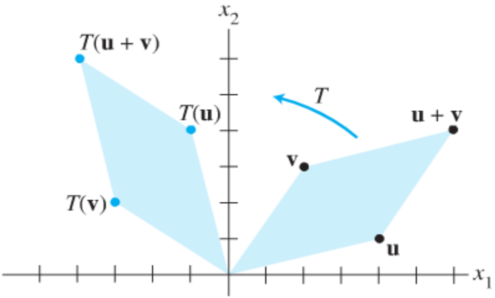
La rotation d'un angle α autour de l'origine

Définition

La rotation d'un angle α autour de l'origine est une application définie par:

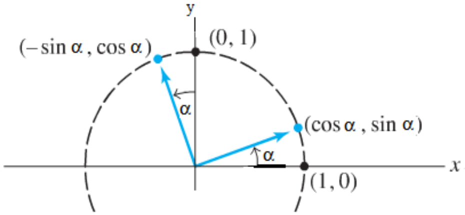
$$
\begin{array}{rccc}
r_\alpha : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\
& \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \vec{w} = r_\alpha(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \cos\alpha - v_2 \sin\alpha \\ v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Représentation graphique.



Rotation

La matrice d'une rotation



Rotation

La matrice associée à la rotation r_α est

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

et on a

$$r_\alpha(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \vec{v}$$

La dilatation ou le rétrécissement

Définition

La dilatation ou le rétrécissement est une application définie par:

$$\begin{array}{rccc} h_{a,b} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \vec{w} = h_{a,b}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} av_1 \\ bv_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Si $a = b$ cette transformation est appelée **homothétie** et que l'on notera h_a.
- Si $a \neq b$, elle est appelée **affinité**.

La matrice d'une dilatation ou d'un rétrécissement

La matrice associée à $h_{a,b}$ est

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

et on a

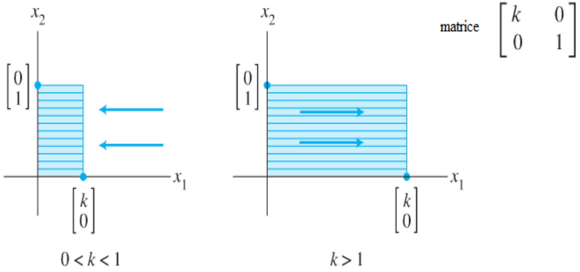
$$h_{a,b}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \vec{v}$$

Représentation graphique

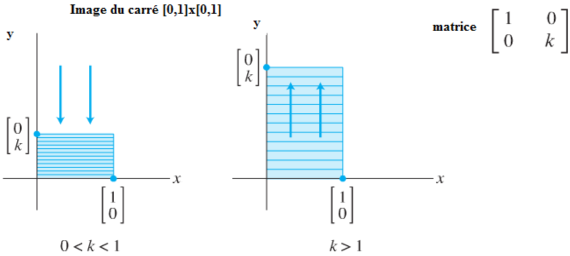
Représentation graphique

Dilatation horizontale

L'image du carré [0,1]x[0,1]



Dilatation verticale



Les symétries dans le plan

La symétrie orthogonale d'axe OX:

Définition

La symétrie orthogonale d'axe OX est définie par

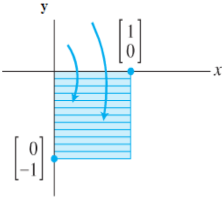
$$S_{OX}\left(\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice associée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Représentation graphique.

Symétrie

Transformation	**Image du carré unité**	**Matrice associée**
Réflexion par rapport à l'axe des x		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Symétrie orthogonale d'axe OY:

Définition

La symétrie orthogonale d'axe OY est définie par

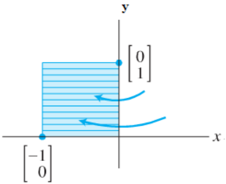
$$S_{OY}\left(\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice associée est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Représentation graphique.

Symétrie

Transformation	**Image du carré unité**	**Matrice associée**
Réflexion par rapport à l'axe des **y**		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Symétrie orthogonale d'axe la droite $y = x$:

Définition

La symétrie orthogonale d'axe la droite $y = x$ est définie par

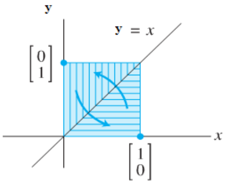
$$S_{(y=x)}\left(\vec{v} = \left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c} v_2 \\ v_1 \end{array}\right).$$

La matrice associée est

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right).$$

Représentation graphique.

Symétrie

Transformation	**Image du carré unité**	**Matrice associée**
Réflexion par rapport à la droite $y = x$		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Symétrie orthogonale d'axe la droite $y = -x$:

Définition

La symétrie orthogonale d'axe la droite $y = -x$ est définie par

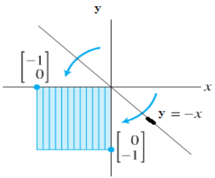
$$S_{(y=-x)}\left(\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice associée est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Représentation graphique.

Symétrie

Transformation	**Image du carré unité**	**Matrice associée**
Réflexion par rapport à la droite $y = -x$		$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Symétrie centrale de centre O:

Définition

La symétrie centrale de centre O est définie par

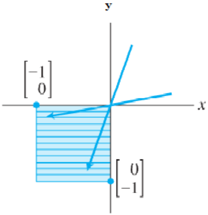
$$S_O\left(\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice associée est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Représentation graphique.

Symétrie

Transformation	**Image du carré unité**	**Matrice associée**
Symétrie par rapport à l'origine		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Cas de dimension 3

La translation

La translation par un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, notée $t_{\vec{a}}$ est une application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$, qui à chaque vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ associe

$$\vec{w} = t_{\vec{a}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 + a_1 \\ v_2 + a_2 \\ v_3 + a_3 \end{pmatrix}.$$

Alerte 1

La translation n'est pas linéaire.

La dilatation ou le rétrécissement

Définition

La dilatation ou le rétrécissement $h_{(a,b,c)}$ est définie par:

$$h_{(a,b,c)}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} av_1 \\ bv_2 \\ cv_3 \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à $h_{(a,b,c)}$ est

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

La rotation

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, l'expression algébrique d'une rotation autour d'un axe quelconque est difficile à obtenir.
Si l'axe de la rotation est OY alors

$$r_\theta^{OY}(x,y,z) = \begin{pmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si l'axe de la rotation est OX alors

$$r_\theta^{OX}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si l'axe de la rotation est OZ alors

$$r_\theta^{OZ}(x,y,z) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La projection sur une droite passant par O

Définition

On considère un vecteur $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ directeur de la droite.

Pour tout $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{aligned}
\vec{z} &= proj_{\vec{w}}(\vec{v}) \\
&= \frac{\vec{v}.\vec{w}}{||\vec{w}||^2}\vec{w} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{w_1}{||\vec{w}||^2}(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) \\ \frac{w_2}{||\vec{w}||^2}(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) \\ \frac{w_3}{||\vec{w}||^2}(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{||\vec{w}||^2}\begin{pmatrix} {w_1}^2 & w_1 w_2 & w_1 w_3 \\ w_2 w_1 & {w_2}^2 & w_2 w_3 \\ w_3 w_1 & w_3 w_2 & w_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{||\vec{w}||^2}\left((\vec{w})(\vec{w})^t\right)\vec{v}.
\end{aligned}$$

La projection sur une plan passant par O et engendré par deux vecteurs orthogonaux

Définition

On considère un plan P passant par O et engendré par deux vecteurs $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ orthogonaux.

Pour tout $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$proj_P(\vec{v}) = proj_{\vec{w_1}}(\vec{v}) + proj_{\vec{w_2}}(\vec{v})$$

Alors

$$proj_P(\vec{v}) = \left(\frac{1}{\|\vec{w_1}\|^2}(\vec{w_1})(\vec{w_1})^t + \frac{1}{\|\vec{w_2}\|^2}(\vec{w_2})(\vec{w_2})^t \right) \vec{v}.$$

Exemple:

On considère le plan $P : x + y + z = 0$ engendré par les vecteurs orthogonaux

$$\vec{w}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)^t, \vec{w}_2 = (1, -1, 0)^t.$$

Donner l'expression matricielle de la projection sur P.