MAT 1200: Introduction à l'algèbre linéaire

Robert Guénette et Saïd El Morchid

Département de Mathématiques et de Statistique

Chapitre 2: Les matrices.

Références:

- Notes de cours chapitre 2 pages 11-35.
- Livre: page 99-120 et 38-46.

Exemple 1:

On suppose qu'une chaine alimentaire veuille suivre l'évolution de 3 produits dans 5 magasins et que les coûts unitaires de ces produits soient donnés dans le tableau suivant.

Magasins	Coût unitaire des aliments		
	A_1 fromage (kg)	A_2 crème glacée (ℓ)	A_3 céréales (kg)
M_1	6.40	0.96	2.30
M_2	5.96	1.13	2.21
M_3	5.98	1.10	2.30
M_4	6.58	1.05	2.30
M_5	6.05	1.06	3.34

La matrice associée à ce tableau est

$$A = \begin{pmatrix} 6.40 & 0.96 & 2.30 \\ 5.96 & 1.13 & 2.21 \\ 5.98 & 1.10 & 2.30 \\ 6.58 & 1.05 & 2.30 \\ 6.05 & 1.06 & 3.34 \end{pmatrix}$$

On notera que la matrice possède 5 lignes et 3 colonnes.

Définition 1:

(i) Une matrice A de dimension (ou format ou type) $m \times n$ est un tableau rectangulaire de nombres réels à m lignes et n colonnes.

(ii) Les éléments de A seront appelés **entrées**, notés a_{ij} où i désigne le numéro de la ligne et j celui de la colonne. On notera aussi $A_{ij} = a_{ij}$.

(iii) L'ensemble de toutes les matrices de dimension $m \times n$ sera noté $M_{m,n}$ ou $M_{m\times n}$.

Notations

On notera la matrice A par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou bien

$$A = (a_{ij}).$$

Vecteur colonne, Vecteur ligne, Matrice nulle

Un **vecteur colonne** est une matrice à une colonne et n lignes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \overrightarrow{X}$$

Un **vecteur ligne** est une matrice à une ligne et n colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} = \overrightarrow{Y}$$

La matrice nulle est la matrice dont toutes les entrées sont nulles.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple:

On considère les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

i) Les matrices A et B sont de quels types? Elles appartiennent à quels ensembles?

ii) Déterminer les éléments: a_{13}, a_{22}, b_{11} et b_{12}.

Égalité de deux matrices

Définition 2:

On dit que deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont **égales** si elles sont du même type et si leurs éléments correspondants sont égaux. C'est à dire

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A, B \in M_{m,n} \\ a_{ij} = b_{ij}. \end{cases}$$

Exemple:

Déterminer x, y, z et t tels que

$$A = \begin{pmatrix} x+y & 2z+t \\ x-y & z-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Les opérations sur les matrices

1) **Le produit par un scalaire**

Exemple:

Dans l'exemple 1, si on considère une augmentation de 40% de chacun des produits par unité et par magasin, la matrice B correspondant à cette augmentation sera obtenue en multipliant chaque entrée de la matrice initiale des prix par 0.4. Ce qui donne

$$B = 0.4\,A = \begin{pmatrix} 2.560 & .384 & .920 \\ 2.384 & .452 & .884 \\ 2.392 & .440 & .920 \\ 2.632 & .420 & .920 \\ 2.420 & .424 & 1.336 \end{pmatrix}.$$

Définition 3:

Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ par un scalaire k est la matrice

$$k\,A = (k a_{ij})\,.$$

2) **La somme de deux matrices**

Exemple:

Dans l'exemple 1 et après une augmentation de 40% de chacun des produits par unité et par magasin, la matrice des nouveaux prix sera obtenue en additionnant terme à terme les entrées des matrices A et B. Ce qui nous donne

$$C = A + B = A + 0.4A = 1.4A = \begin{pmatrix} 8.960 & 1.344 & 3.220 \\ 8.344 & 1.582 & 3.094 \\ 8.372 & 1.540 & 3.220 \\ 9.212 & 1.470 & 3.220 \\ 8.470 & 1.484 & 4.676 \end{pmatrix}.$$

Définition 4:

La somme de deux matrices du même type $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ est la matrice du même type

$$C = A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Exemple:

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$
Calculer $3A - 2B$.

Propriétés:

Soient A, B et C trois matrices de même type et r et s des scalaires. Alors

(a) $A + B = B + A$ (commutativité de $+$)

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativité de $+$)

(c) $A + 0 = 0 + A$ (la matrice 0 est l'élément neutre de $+$)

(d) $r(A + B) = rA + rB$

(e) $(r + s)A = rA + sA$

(f) $r(sA) = (rs)A$

Le produit matriciel

Produit d'une ligne avec une colonne

Pour motiver la définition du produit matriciel, on retourne à l'exemple 1 de la chaine alimentaire. On passe une commande des 3 produits (fromage, crème et céréales)

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le coût d'achat dans le magasin M_1 sera

$$6.40 \times 4 + 0.96 \times 2 + 2.30 \times 1 = 29.82$$

On définit le produit de la matrice ligne avec la matrice colonne par le calcul ci-dessus

$$29.82 = \begin{pmatrix} 6.40 & 0.96 & 2.30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel (suite)

Produit d'une matrice avec un vecteur

On étend ce calcul à l'ensemble des magasins

$$AB = \begin{pmatrix} 6.40 & 0.96 & 2.30 \\ 5.96 & 1.13 & 2.21 \\ 5.98 & 1.10 & 2.30 \\ 6.58 & 1.05 & 2.30 \\ 6.05 & 1.06 & 3.34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29.82 \\ 28.31 \\ 28.42 \\ 30.72 \\ 29.66 \end{pmatrix}$$

Pourquoi pas étendre ce calcul pour plusieurs commandes regroupées sous forme d'une matrice B

$$AB = \begin{pmatrix} 6.40 & 0.96 & 2.30 \\ 5.96 & 1.13 & 2.21 \\ 5.98 & 1.10 & 2.30 \\ 6.58 & 1.05 & 2.30 \\ 6.05 & 1.06 & 3.34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29.82 & 28.60 \\ 28.31 & 27.95 \\ 28.42 & 28.04 \\ 30.72 & 29.59 \\ 29.66 & 30.13 \end{pmatrix}$$

Exemple:

Calculer le produit

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 6 & -8 & -7 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 5:

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $m \times n$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $n \times p$. Alors $AB = (c_{ij})$ est une matrice $m \times p$ avec

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Remarque 1 :

Notons par $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \cdots, \overrightarrow{b_p}$ les vecteurs colonnes de la matrice B. Alors

$$AB = A\left[\begin{array}{cccc} \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{b_2} & \cdots & \overrightarrow{b_p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} A\overrightarrow{b_1} & A\overrightarrow{b_2} & \cdots & A\overrightarrow{b_p} \end{array}\right].$$

Exemple:

Utiliser la remarque 1 pour calculer le produit AB des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 6 & -8 & -7 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice:

Soient les matrices $A \in M_{2,3}$, $B \in M_{4,3}$, $C \in M_{3,3}$, $E \in M_{3,2}$ et $F \in M_{3,7}$.

Déterminer, si c'est possible, la dimension des matrices suivantes.

(a) AC,

(b) EA,

(c) AE,

(d) FE,

(e) ACB,

(f) BEA,

(g) $BCEF$.

Exercice:

Soient $A \in M_{5,3}$ et B une matrice telle que le produit AB soit dans $M_{5,7}$. Quel est le type de la matrice B?

Exercice:

Combien de lignes a la matrice B si le produit BC est une matrice de type 3×4?

Propriétés du produit matriciel:

Soient un scalaire a et trois matrices A, B, et C vérifiant les conditions requises pour que les sommes et les produits ci-dessous existent:

(a) $(AB)C = A(BC)$

(b) $A(B + C) = AB + AC$

(c) $(A + B)C = AC + BC$

(d) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$

(e) $0A = A0 = 0$

Alerte 1

Si $AB = AC$ alors ceci n'implique pas que $B = C$.

Exemple:

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB et AC.

Alerte 2

Si $AB = 0$ alors ceci n'implique pas que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple:

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB.

Exercices

Exercice 1:

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \; AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer la première et la deuxième colonne de B.

Exercice 2:

Le propriétaire d'une cantine mobile spécialisée dans la préparation du poulet veut savoir quelle somme il doit investir chaque jour pour servir ses clients. Tous les matins il cuisine 200 repas répartis comme suit: 100 menus économiques (Eco), 60 menus ordinaires (Ord) et 40 menus gourmet (Gou). La matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 100 & 60 & 40 \end{pmatrix}$$

représente cette répartition. Le propriétaire a établi un système d'unités qui lui permet d'évaluer les quantités de poulet (P), de frites (F), de boissons (B), de dessert (D), et de travail (T) requis pour préparer un repas de chaque menu. Le tableau suivant nous montre ses données.

	P	F	B	D	T
Eco	1	1	1	0	2
Ord	2	1	2	1	3
Gou	3	2	2	1	4

La valeur en dollars de chaque unité de produit est donnée par le tableau

	P	F	B	D	T
Coût	0,60	0,25	0,30	0,40	0,80

Les matrices carrées

Définition 6

Une matrice carrée A est une matrice dont le nombre de lignes n est égal au nombre de colonnes. On dit que A est une matrice carrée de dimension n.

La matrice identité de dimension n

est la matrice carrée

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ou bien

$$I = I_n = (a_{ij}) \quad avec \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Proposition 1:

Soit A une matrice $n \times m$, alors

$$I_n A = A I_m = A$$

Matrice inversible

Définition 7:

Une matrice carrée A de dimension n est dite **inversible**, s'il existe une matrice B telle que

$$AB = BA = I_n.$$

La matrice B est appelée **l'inverse** de la matrice A et notée A^{-1}. Elle est unique selon la proposition suivante.

Proposition 2:

Si on a $AB = I_n$ et $CA = I_n$ alors $B = C$.

Proposition 3:

Soit A une matrice carrée.

(1) Si B est une matrice carrée telle que $BA = I$, alors $B = A^{-1}$.

(2) Si B est une matrice carrée telle que $AB = I$, alors $B = A^{-1}$.

Exemple:

Montrer que les matrices suivantes sont inverses l'une de l'autre.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposition 4:

Si A et B sont deux matrices inversibles de même dimension, alors

(1) AB est inversible.

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Exemple:

Déterminer l'inverse du produit AB si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comparer $A^{-1}B^{-1}$ et $B^{-1}A^{-1}$.

Corollaire 1:

Soient $A_1, \cdots, A_r$ des matrices carrées inversibles et de même dimension. Alors leur produit est inversible et on a

$$(A_1 \cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Définition 8:

Soit A une matrice carrée et n un entier positif. Alors

$$A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ fois}}, \quad A^0 = I.$$

Si A est inversible, alors

$$A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}_{n \text{ fois}}$$

Proposition 5:

Soit A une matrice inversible. Alors

(1) A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,

(2) A^n est inversible et $(A^n)^{-1} = A^{-n}$,

(3) Pour tout $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, cA est inversible et $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.

Quelques matrices particulières

Les matrices diagonales:

Définition 9:

Une matrice carrée $D = (d_{ij})$ est dite **diagonale** si

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ d_{ii} \in \mathbb{R} & si \quad i = j \end{cases}$$

Exemple:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \; D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 11 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D_1 est une matrice diagonale par contre D_2 ne l'est pas.

Remarque 2:

Pour une matrice diagonale, on peut stocker les éléments diagonaux dans un vecteur. Par exemple, pour la matrice D de l'exemple 13, on peut définir le vecteur

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Exemple 16:

Écrire la matrice diagonale représentée par le vecteur

$$d = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Inverse d'une matrice diagonale:

Si $D = (d_{ij})$ est une matrice diagonale telle que pour tout i, $d_{ii} \neq 0$ alors D est inversible et D^{-1} est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les $\frac{1}{d_{ii}}$.

Exemple:

$$D = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \; D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Les matrices triangulaires

Définition 10:

(1.) **Matrice triangulaire inférieure:** Une matrice carrée $L = (l_{ij})$ est dite triangulaire inférieure si tous les éléments de L qui sont au dessus de la diagonale sont nuls. Ceci signifie que

$$l_{ij} = 0 \ \ si \ \ i < j.$$

Exemples:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -9 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 11:

(2.) **Matrice triangulaire supérieure:** Une matrice carrée $L = (l_{ij})$ est dite triangulaire supérieure si tous les éléments de L qui sont au dessous de la diagonale sont nuls. Ceci signifie que

$$l_{ij} = 0 \quad si \quad i > j.$$

Exemple:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 6:

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si, aucun élément de sa diagonale est nul.

Exemple:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice transposée

Définition 12:

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,m}$. On appelle transposée de A la matrice $A^t = (b_{ij}) \in M_{m,n}$ dont les colonnes sont les lignes de A, c'est à dire

$$(b_{ij}) = a_{ji},\ \ i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m.$$

Exemple:

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Donner la transposée de chacune de ces matrices.

Définitions 13:

• Une matrice carrée $A \in M_{n,n}$ est dite **symétrique** si $A = A^t$.
• Une matrice carrée $A \in M_{n,n}$ est dite **antisymétrique** si $A^t = -A$.
• Une matrice carrée $A \in M_{n,n}$ est dite **orthogonale** si $A^t = A^{-1}$. De telles matrices sont nécessairement inversibles.

Exemple:

Quelle est la nature des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix},$$

Proposition 7:

Soient $A, B \in M_{n,n}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on suppose que A est inversible et D une matrice diagonale de dimension n. Alors

(a) $D^t = D$,

(b) $(A^t)^t = A$,

(c) $(A + \alpha B)^t = A^t + \alpha B^t$

(d) $(AB)^t = B^t A^t$,

(e) $\left(A^{-1}\right)^t = (A^t)^{-1}$

Exercices

Exercice 1

Trouver x, y et z pour que la matrice A soit symétrique:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ 4 & 5 & y \\ z & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice:

Soit A une matrice carrée; montrer que

(a) $A + A^t$ est symétrique,

(b) $A - A^t$ est antisymétrique,

(c) $A = B + C$ où B est symétrique et C est antisymétrique.

Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition:

On appelle matrice d'adjacence d'un graphe G à n noeuds, la matrice $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}$ définie par

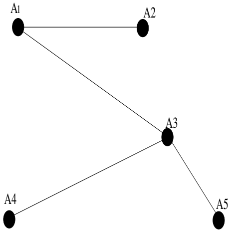
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si une arête joint le noeud } i \text{ au noeud } j \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 3:

La matrice d'adjacence d'un graphe est toujours symétrique.

Exemple:

On considère le graphe G suivant qui contient 5 noeuds et 4 arêtes.



La matrice d'adjacence du graphe G est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition:

Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe. Dans la matrice A^k, le terme a_{ij} est égale au nombre de chemins contenant k arêtes allant de i à j.

Exemple:

Donner les matrices A^2 et A^3 de l'exemple 23 ci-dessus.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = ??$$