MAT 1200:
Introduction à l'algèbre linéaire

Saïd EL MORCHID

Département de Mathématiques et de Statistique

Chapitre 2 : Applications des systèmes linéaires (Livre section 1.6).

Références:

- Notes de cours chapitre 3 page 36, 68.
- Livre: pages 53-60 section 1.6.

Un système homogène en économie

Exemple

L'économie envisagée se compose des secteurs du charbon, de l'énergie électrique et de l'acier. L'output de chaque secteur se répartit sur les autres secteurs selon les données de la table suivante, où les éléments d'une colonne expriment les parts de l'outpout total d'un secteur (la somme des fractions de chaque colonne doit être égale à 1).

Distribution de l'output			
Charbon	Électricité	Acier	Acheté par
$0,0$	$0,4$	$0,6$	Charbon
$0,6$	$0,1$	$0,2$	Électricité
$0,4$	$0,5$	$0,2$	Acier

Les prix (en dollars) des outputs annuels totaux du charbon, de l'électricité et de l'acier sont notés p_C, p_E et p_A respectivement.
L'économiste Wassily Leontief (Prof. à Havard, 1949) a démontré le résultat suivant:
Il existe des prix d'équilibre à attribuer à chaque output total des différents secteurs tels que la recette de chaque secteur compense exactement ses dépenses.

Question:

Dans notre exemple, déterminer, si possible les prix d'équilibre qui font en sorte que les recettes de chaque secteur compensent les dépenses.

Solution:
La première ligne du tableau signfie que les dépenses totales du secteur du charbon s'élèvent à

$$p_C = 0,4p_E + 0,6p_A \quad (1)$$

La deuxième ligne du tableau signfie que les dépenses totales du secteur de l'éléctricté s'élèvent à

$$p_E = 0,6p_C + 0,1p_E + 0,2p_A \quad (2)$$

La troisième ligne du tableau signfie que les dépenses totales du secteur de l'acier s'élèvent à

$$p_A = 0,4p_C + 0,5p_E + 0,2p_A \quad (3)$$

Les équations $(1),(2)$ et (3) nous donnent le système homogène

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} p_C - 0,4p_E - 0,6p_A & = & 0 \\ -0,6p_C + 0,9p_E - 0,2p_A & = & 0 \\ -0,4p_C - 0,5p_E + 0,8p_A & = & 0 \end{array}\right.$$

La matrice augmentée du système est

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ -0,6 & 0,9 & -0,2 & 0 \\ -0,4 & -0,5 & 0,8 & 0 \end{array}\right]$$

On effectue les opérations élémentaires $L_2 \to L_2 + 0,6L_1$ et $L_3 \to L_3 + 0,4L_1$.
Puis dans la matrice obtenue, on efectue l'opération $L_3 \to L_3 + L_2$.
Ensuite, on efectue l'opération $L_2 \to \frac{1}{0,66}L_2$, puis l'opération $L_1 \to L1 + 0,4L_2$. On obtient

$$A \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -0,94 & 0 \\ 0 & 1 & -0,85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La solution générale est

$$p_C = 0,94p_A, p_E = 0,85p_A \quad et \quad p_A \quad est \quad libre.$$

Le vecteur des prix d'équilibre de cette économie est

$$p = \begin{bmatrix} p_C \\ p_E \\ p_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,94 p_A \\ 0,85 p_A \\ p_A \end{bmatrix} = p_A \begin{bmatrix} 0,94 \\ 0,85 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

À chaque valeur non négative pour p_A correspond des prix d'équilibre.

Le flux dans un réseau routier

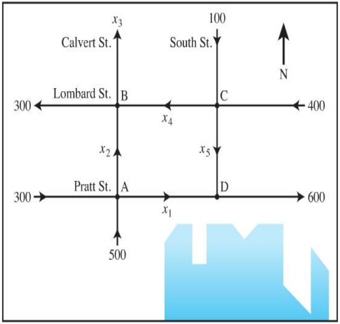

FIGURE 2 Quelques rues de Baltimore

Le graphe ci-dessus, représente le traffic routier au voisinage de 4 intersections: A, B, C, D.

Le sens de parcours est indiqué par une flêche. L'hypothèse de base qui régit la circulation est que le flux entrant est égal au flux sortant et que le flux qui arrive à un nœud est égal au flux total qui le quitte.

Analyser un réseau, c'est déterminer le flux sur chaque branche.

Pour notre exemple, on veut calculer le traffic sur les trançons x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5
On obtient le tableau

Intersection	Flux entrant		Flux sortant
A	$300 + 500$	$=$	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_4$	$=$	$300 + x_3$
C	$100 + 400$	$=$	$x_4 + x_5$
D	$x_1 + x_5$	$=$	600

On obtient le système linéaire

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 800 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = & 300 \\ x_4 + x_5 & = & 500 \\ x_1 + x_5 & = & 600 \end{array}\right.$$

La résolution de ce système nous donne

$$(S)\left\{\begin{array}{c} x_1 = 600 - x_5 \\ x_2 = 200 + x_5 \\ x_3 = 400 \\ x_4 = 500 - x_5 \\ x_5 \ \textit{est libre} \end{array}\right.$$

Question: y-a-t-il une limitation des valeurs possibles de x_5? Si oui comment cette contrainte se répercute-t-elle sur x_1 et x_2?

Solution de la question: Le flux négatif dans une branche du réseau signifie que la circulation s'y effectue dans le sens opposé à celui indiqué sur le modèle. Donc $x_5 \leq 500$ pour que x_4 soit positif.
Dans ce cas, $x_1 \geq 100$ et $x_2 \leq 700$ et comme $x_5 \geq 0$, alors $x_1 \leq 600$ et $x_2 \geq 200$. Donc

$$100 \leq x_1 \leq 600 \; et \; 200 \leq x_2 \leq 700.$$