MAT 1200:
Introduction à l'algèbre linéaire

Saïd EL MORCHID

Département de Mathématiques et de Statistique

Chapitre 2 : Les systèmes linéaires (partie 2).

Références:

- Notes de cours chapitre 3 pages 36-43.
- Livre: pages 13-26 section 1.2, pages 46-53 section 1.5.

Élimination de Gauss (Livre section 1.2.)

Élément directeur:

On appelle **élément directeur** (ou **pivot**) d'une ligne d'une matrice, sa première entrée non nulle.

Exemple :

Déterminer les éléments directeurs de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrice échelonnée:

Une matrice $A \in M_{m,n}$ sera dite **sous forme échelon** (ou bien **sous forme échelonnée**) si:

(1) les lignes ne contenant que des zéros sont sous les autres lignes;

(2) chaque élément directeur d'une ligne est à la droite de l'élément directeur de la ligne qui la précède.

(3) Tous les éléments de la colonne sous un élément directeur sont nuls.

Exemple:

$$A = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

($\blacksquare$) est un nombre non nul et ($*$) un nombre quelconque.

Matrice échelonnée réduite:

Une matrice est dite **sous forme échelon réduite** (ou bien **sous forme échelonnée réduite**) si,

(a) elle est sous forme échelon;

(b) tous ses éléments directeurs sont égaux à 1;

(c) dans une colonne qui contient un 1 directeur, il n'y a pas d'autre élément non nul.

Exemple:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & 4 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A est une matrice sous forme échelon réduite
B n'est pas une matrice sous forme échelon réduite

Exemple:

Donner la matrice augmentée du système suivant puis donner sa forme échelon

$$S_1 \left\{ \begin{array}{rcl} x + 3y + 4z & = & 7 \\ 3x + 9y + 7z & = & 6 \end{array} \right.$$

Exemple:

Déterminer les solutions générales du système, noté S_2, dont la matrice augmentée est

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice (examen aut 2002):

On considère le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+tz & = & t \\ x+z & = & 0 \\ ty-2tz & = & 0 \end{array}\right.$$

dans lequel t est un paramètre réel.

(a) Écrire la matrice augmentée du système et la réduire sous forme échelon.

(b) Déterminer les ensembles solutions du système en fonction des valeurs de t.

Procédure de résolution d'un système linéaire

(1) Écrire la matrice augmentée du système;

(2) Déterminer la forme échelon de la matrice augmentée;

(3) Si la procédure conduit à une équation du type $0 = c$ où $c \neq 0$, le système est inconsistant.

(4) Si la partie non nulle de la matrice est une matrice triangulaire, dont tous les éléments diagonaux sont non nuls, alors le système possède une solution unique.

(5) Pour déterminer, les inconnues, on commence par la ligne la plus courte;

(6) Pour une ligne donnée, on détermine la variable qui correspond à l'élément directeur. Si d'autres variables apparaissent et qui n'ont pas encore été déterminées, on les choisit comme variables libres. Les variables libres sont nécessairement celles dont le numéro ne correspond au numéro de colonne d'aucun élément directeur.

Exemple:

Dans l'espace, déterminer l'intersection des trois plans $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$, $x_2 - x_3 = 1$ et $x_1 + 3x_2 = 0$.

Exemple:

Résoudre le système dont la matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Systèmes homogènes et inhomogènes

Définition:

Un système d'équations linéaires est dit **homogène** si le membre de droite du système est le vecteur nul. Il est dit **inhomogène** s'il n'est pas homogène.

Remarque:

Un système homogène possède toujours au moins une solution, la solution $\vec{x} = 0$. S'il possède plus d'une solution, il en possède en fait une infinité.

Proposition:

Soit $A \in M_{m,n}$. Si le système $A\vec{x} = \overrightarrow{0}$ possède une solution $\vec{x}_0$, alors pour toute constante $c \neq 0$, le vecteur $\vec{x}_1 = c\vec{x}_0$ est aussi solution.

Théorème:

Un système homogène de m équations linéaires à n inconnues pour lequel $m < n$, possède une infinité de solutions.

Exemple:

Donner l'ensemble de solution du système

$$S\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 6x_5 & = & 0 \\ 5x_1 + 10x_2 - 13x_3 + 4x_4 - 16x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

L'algorithme de Gauss-Jordan

Pour une matrice A, cet algorithme consiste à déterminer une matrice équivalente à A et qui est sous forme échelon réduite.

Définition:

Deux matrices sont dites **équivalentes suivant les lignes** , si l'une peut être obtenue de l'autre au moyen d'opérations élémentaires sur les lignes.

Théorème:

Soit $A \in M_{m,n}$, il existe une unique matrice échelon réduite $R \in M_{m,n}$ qui est équivalente à A suivant les lignes.

Exemple:

Donner la matrice échelon réduite équivalente à

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Le rang d'une matrice

Définition:

On appelle **rang** d'une matrice $A \in M_{m,n}$, noté $r(A)$, le nombre de lignes non nulles de la forme échelon réduite de cette matrice. Il est aussi égal au nombre de colonnes contenant 1.

Proposition:

Soient A et B deux matrices $m \times n$. Alors

(a) Si A et B sont équivalentes suivant les lignes, $r(A) = r(B)$.

(b) $r(A) \leq min(m, n)$.

Théorème:

Soit $A \in M_{m,n}$ une matrice et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ un vecteur. On note $[A|\vec{b}]$ la matrice augmentée du système $A\vec{x} = \vec{b}$. On a alors

(a) Si $r\left([A|\vec{b}]\right) > r(A)$ le système n'admet aucune solution.

(b) Si $r\left([A|\vec{b}]\right) = r(A) = r$, le système aura une solution unique si $r = n$ et une infinité de solutions si $r < n$.

Exemple:

Donner le rang des matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$