MAT 1200:
Introduction à l'algèbre linéaire

Robert Guénette et Saïd El Morchid

Département de Mathématiques et de Statistique

Chapitre 2 : Les systèmes linéaires (partie 3).

Références:

- Notes de cours chapitre 3 page 56.
- Livre: pages 111-121 section 2.2, pages 134-143 section 2.5.

Matrices élémentaires (Livre page 115)

Définition

Une matrice élémentaire $n \times n$ est une matrice obtenue à partir de la matrice unité I_n après avoir effectué une seule opération élémentaire sur les lignes de I_n.

Exemple :

Remplacer les $\cdots$ par la bonne opération élémentaire pour obtenir E_i.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdots \to \cdots\cdots} E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdots \to \cdots\cdots} E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdots \to \cdots\cdots} E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposition:

Soit A une matrice $m \times n$. Soit E la matrice obtenue après avoir effectué une opération élémentaire sur les lignes de I_m. Alors EA est la matrice obtenue après avoir effectué la même opération élémentaire sur les lignes de A.

Exemple:

Donner la matrice obtenue après chacune des opérations élémentaires

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 4L_1} B = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 4L_1} E = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Calculer EA et la comparer avec B.

Exemple:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 2L_1} B = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 2L_1} E = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Calculer EA et la comparer avec B.

Exemple:

Donner , sans calculer le produit, la matrice $E_2 A$.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Remarques

Soit A une matrice.

(1) $A \xrightarrow{L_i \to cL_i} B \xrightarrow{L_i \to \frac{1}{c} L_i} A$

(2) $A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} B \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} A$

(3) $A \xrightarrow{L_i \to L_i + cL_j} B \xrightarrow{L_i \to L_i - cL_j} A$

Proposition:

Toute matrice élémentaire est inversible et l'inverse d'une matrice élémentaire est aussi une matrice élémentaire.

Exemples:

Donner l'inverse des matrices suivantes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Théorème

Soit A une matrice $n \times n$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

(1) A est inversible,

(2) $A\vec{x} = 0$ ne possède que la solution triviale ($\vec{x} = 0$),

(3) $rg(A) = n$,

(4) A est équivalente suivant les lignes à I_n.

Corollaire 1

Soit A une matrice $n \times n$. Si la forme échelon réduite suivant les lignes de A n'est pas I_n, alors A n'est pas inversible.

Corollaire 2

Soit A une matrice $n \times n$. Si le rang de A est plus petit que n, c'est-à-dire $rg(A) < n$, alors A n'est pas inversible.

Calcul de l'inverse

Proposition

S'il existe des matrices élémentaires telles que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n$$

alors A est inversible et

$$E_k \cdots E_2 E_1 = A^{-1}$$

Algorithme pour calculer l'inverse

(1) Construire la matrice $n \times 2n$, $[A|I_n]$,

(2) mettre A sous forme échelon réduite suivant les lignes,

(3) effectuer sur I_n les mêmes opérations élémentaires que sur A et ce dans le même ordre.

Exemple:

Calculer, s'il existe, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Inversion et résolution des systèmes

Théorème:

Soit A une matrice $n \times n$ inversible. Alors pour toute matrice $\vec{b}$ de dimension $n \times 1$, le système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une et une seule solution $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Exemple:

Utiliser la matrice de l'exemple prècédent, pour déterminer la solution du système

$$(S)\left\{\begin{array}{ccc} x-2z & = & 1 \\ -3x+y+4z & = & 2 \\ 2x-3y+4z & = & 3 \end{array}\right.$$

Théorème:

Pour A une matrice $n \times n$ quelconque, les propriétés suivantes sont équivalentes

(1) A est inversible,

(2) le système $A\vec{x} = 0$ ne possède que la solution triviale $\vec{x} = 0$,

(3) $rg(A) = n$,

(4) A est équivalente suivant les lignes à I_n,

(5) le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistant pour toute matrice $\vec{b}$.

Exemple:

Trouver toutes les matrices $\vec{b}$ de dimension 3×1 pour lesquelles le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistant, où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Factorisation LU d'une matrice

La factorisation (ou décomposition) LU d'une matrice A est motivée par la situation, usuelle dans les problèmes de l'industrie ou du monde des affaires, dans laquelle on veut resoudre une suite de systèmes linéaires ayant tous la même matrice de coefficients $A \in M_{m,n}$;

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b_1},\ A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b_2},\ \cdots\ A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b_p}.$$

Définition:

La factorisation LU consiste à écrire une matrice $A \in M_{m,n}$ comme le produit de deux autres matrices $L \in M_{m,m}$ et $U \in M_{m,n}$ avec

- L est une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur la diagonale,
- U est une matrice triangulaire supérieure.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{m,1} & l_{m,2} & l_{m,3} & \cdots & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2,n} \\ 0 & 0 & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{m,n} \end{pmatrix}$$

Résolution avec $A = LU$

Si $A = LU$, le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ peut s'écrire $L(U\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$. Si l'on pose $\overrightarrow{y} = U\overrightarrow{x}$, on peut déterminer $\overrightarrow{x}$ en résolvant les deux équations

$$\begin{array}{rcl} L\overrightarrow{y} & = & \overrightarrow{b} \\ U\overrightarrow{x} & = & \overrightarrow{y} \end{array}$$

On détermine d'abord $\overrightarrow{y}$ de la première équation, puis on remplace $\overrightarrow{y}$ dans la seconde équation et on détermine $\overrightarrow{x}$.

Comment obtenir la factorisation LU?

Procédure:

On suppose que A est une matrice $m \times n$ que l'on peut transformer par la méthode de Gauss en une forme échelonnée $U \in M_{m,n}$, **sans utiliser d'échanges de lignes** (on traitera le cas général plus loin). Alors

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = U$$

où les matrices $E_k, E_{k-1}, \cdots, E_2, E_1$ sont les matrices élémentaires corrspondant à chaque opération. Ces matrices sont triangulaires inférieures et possèdent des 1 sur la diagonale. Elles sont donc inversibles et leurs inverses respectives sont aussi triangulaires inférieures et possèdent des 1 sur la diagonale. Ainsi

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} U.$$

Alors

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} \text{ et } A = LU.$$

Théorème:

Soit $A \in M_{m,n}$. Si la méthode d'élimination de Gauss permet de passer de A à une matrice triangulaire $U \in M_{m,n}$ **sans aucun changement de ligne**, il existe une matrice triangulaire inférieure $L \in M_{m,m}$, telle que

(a) $l_{i,i} = 1$ pour $i = 1, \cdots, m$,

(b) $A = LU$.

Exemple:

Cherchons la factorisation LU de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Les opérations $L_2 \rightarrow L_2 + 3L_1$ et $L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1$, ensuite, dans la matrice obtenue, l'opération $L_3 \rightarrow L_3 + \frac{3}{2}L_2$ donnent

$$A \sim U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Déterminer les matrices, E_1, E_2, E_3, élémentaires correspondant aux opérations effectuées, et leurs inverses.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to E_1 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \ E_1^{-1} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to E_2 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \ E_2^{-1} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to E_3 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \ E_3^{-1} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Alors

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ et } A = LU.$$

Exemple:

Cherchons la factorisation LU de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrice de permutation

Dans la méthode de Gauss, on est amené à échanger des lignes quand l'élément pivot est nul ($a_{ii} = 0$). Si ceci se produit, on ne pourra pas calculer la colonne i de L. Faire des échanges de lignes ce serait introduire une matrice de permutation dans le produit des matrices élémentaires et L ne sera plus triangulaire.

Définition:

Une matrice de **permutation** est une matrice carrée qui vérifie

(1) les entrées sont 0 et 1,

(2) il y a un seul 1 par ligne,

(3) il y a un seul 1 par colonne.

Exemple:

Vérifier que la matrice suivante est une matrice de permutation, égale au produit de deux matrices élémentaires.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemples-Exercices.

Exemple:

Soit à résoudre le système $A\vec{x} = \vec{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- On résoud d'abord le système $L\vec{z} = \vec{b}$,
- On résoud ensuite le système $U\vec{x} = \vec{z}$

Exemple:

Trouver une factorisation PLU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 6 & 9 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilisez-la pour résoudre le système $A\vec{x} = (1, 0, -1)^t$

Exemple:

Montrer que la factorisation LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Utilisez-la pour résoudre le système

$$A\vec{x} = (-9, 5, 7, 11)^t$$

Exercie : Examen 1 aut. 2010:

Soit A la matrice carrée

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

a) Déterminer une factorisation LU de la matrice A (L est une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur la diagonale et U est une matrice triangulaire supérieure).

b) Utiliser la factorisation LU pour résoudre le système linéaire

$$A\vec{x} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -2 \end{array} \right)$$