Indications sur les exercices supplémentaires aux TP5

2. Réponse: (a),(b),(c) et (h) divergent par comparaison avec la série harmonique (en (h) on utilisera le résultat $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$); (g) et (i) divergent car le terme général ne tend pas vers 0; (j) diverge par le critère de l'intégrale et les autres convergent.

3. Solution: comme le terme général est positif et décroissant, on peut utiliser le critère de condensation, ce qui nous ramène à étudier la série

$$\sum_k \frac{2^k}{2^k(\log 2^k)^p} = \sum_k \frac{1}{k^p(\log 2)^p}.$$

   Comme cette dernière série converge uniquement pour $p > 1$, le résultat suit.

4. (c), (f) (g) et (h) convergent absolument; (e) diverge car son terme général ne tend pas vers 0; les autres convergent conditionnellement.

5. Pour l'inégalité de gauche minorez par s_2; pour l'inégalité de droite, on peut raisonner comme dans la preuve du critère de condensation de Cauchy: puisque $1/n^3$ est décroissante, on a

$$\sum \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^3} \leq \frac{5}{4}.$$

6. Elle est absolument convergente car

$$\left|\frac{\cos n\pi a}{x^2+n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

8. Appliquez le critère de comparaison.

9. Aide: montrez que la somme partielle de rang $3n$ satisfait

$$s_{3n} \geq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4(n-1)+1}}.$$

10. Aide: utilisez le fait que $u_n \to 0$ pour obtenir que $u_n^2 \leq u_n$ à partir d'un certain rang. Concluez en appliquant le critère de comparaison.

11. Aide: utilisez l'inégalité $|xy| \leq (x^2+y^2)/2$ pour montrer que la série converge absolument.

12. C'est un cas particulier de l'exercice 11.

25. Il suffit d'appliquer le théorème du cours sur la dérivabilité terme à terme des séries entières.

26. Solution: Appliquons le critère du rapport à la série $\sum \frac{n^n|x|^n}{n!}$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{(n+1)}|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{(n+1)}|x|}{(n+1)n^n} = \lim_{n\to\infty} |x| \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = |x|e.$$

Ainsi la série converge absolument si $|x|e < 1$.

27. Solution: La série ressemble à une série géométrique, sauf qu'il manque les puissances de la forme $3k+2$. On peut soupçonner que le rayon de convergence sera 1... Si $|x| \geq 1$, alors le $n$ième terme de la série ne tend pas vers 0 car il est de valeur absolue ≥ 1. Si $|x| < 1$, alors le $n$ième terme de la série, appelons-le b_n, satisfait $|b_n| \leq |x|^n$ (car b_n est égal à $\pm|x|^m$ pour un $m \geq n$). Par comparaison avec la série géométrique, on conclut que la série converge absolument pour $|x| < 1$. Maintenant qu'on sait que la série converge pour $|x| < 1$, on peut la calculer facilement en groupant les termes 2 à 2:

$$\begin{aligned} 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \ldots &= (1-x) + (x^3 - x^4) + (x^6 - x^7) + \ldots \\ &= (1-x)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots) \\ &= \frac{(1-x)}{1-x^3} \\ &= \frac{1}{x^2+x+1} \end{aligned}$$