Analyse 1
21 mars 2016

Réponses aux Exercices sur les séries, partie 1

1. (a) Solution:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^{2n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{(3^2)^n\cdot 3}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{9}\right)^n=\frac{1}{3}\left(\frac{(\frac{-2}{9})}{1-(\frac{-2}{9})}\right)=\frac{-2}{33}$$

(b) Solution: On transforme le terme général par la méthode des fractions partielles, ce qui donne:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}$$

On calcule donc:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}\right)\\&=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right)\\&=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{(2N-1)}-\frac{1}{(2N+1)}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{(2N+1)}\right)\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(c) La réponse est 3/2. (C'est aussi une série télescopique.)

(d) La réponse est $-2/3$. (C'est une série géométrique.)

2. (a) Converge (comparaison avec $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.)
   (b) Converge (d'Alembert)
   (c) Diverge (le terme général ne tend pas vers 0)
   (d) Diverge (comparaison avec la série harmonique)
   (e) Converge (d'Alembert)
   (f) Converge (voir 1(c), ou comparer avec $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$.)

3. 1. Aide: ce sont deux séries télescopiques.

7. Solution: Les sommes partielles s_k de la série $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ sont: $s_k = \sum_{n=0}^{k}(a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{k+1}$ (somme télescopique). Or, puisque la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, on a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Donc $\lim_{k\to\infty} s_k = a_0$.

10. Aide: puisque la série $\sum u_n$ converge, on a $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ et en particulier la suite (u_n) est bornée. Utiliser ce fait pour appliquer le critère de comparaison, en comparant avec une série bien choisie.