Analyse 1
11 février 2016

Exercices supplémentaires aux travaux pratiques 2 et 3, indications et réponses

1. La dernière implication $n/(n+1) < \varepsilon \Rightarrow 1/(n+1) < \varepsilon$ ne va que dans un sens. Savoir que $1/(n+1) < \varepsilon$ ne nous assure pas que $n/(n+1) < \varepsilon$.

2. (a) $a_n = (-1)^n$ et $b_n = (-1)^{n+1}$ est un exemple
   (b) $a_n = b_n = (-1)^n$ est un exemple
   (c) Non: posons $c_n = a_n + b_n$. Si $\lim_{n\to\infty} c_n$ existait, alors par le théorème sur les règles de calcul des limites, on aurait que $\lim_{n\to\infty} c_n - a_n$ existerait. Mais $c_n - a_n = b_n$.
   (d) Oui. En fait, ce sera toujours le cas, par l'argument en (c).

3. On observe que les valeurs s'approchent de 1. La suite calculée est $a^{1/2^n}$.

4. (a) On vérifie facilement que le membre de droite est un majorant de la suite $(a_n + b_n)$. Le sup étant le plus petit majorant, le résultat suit.
   (b) On pourrait prendre par exemple $a_n = (-1)^n$ et $b_n = (-1)^{n+1}$.
   (c) Dans l'ensemble C, on a toutes les combinaisons $a_n + b_m$, où n et m parcourent $\mathbb{N}$ **indépendamment**. Ainsi, par exemple, $a_1 + b_2 \in C$. Il y a plus d'éléments dans C, ce qui explique que son sup peut être plus grand.

5. 2. (a) $1/n!$ décroît. Regardez quel est le premier n où ça devient < 0.01.
      (b) Semblable à a).
      (c) Le choix $n_0 = 1777$ est approprié
      (d) Le choix $n_0 = 75$ est approprié
   4. Toutes le sont sauf a).
   5. Procédez par induction. Il sera utile de trouver une formule pour x_{n+2} en termes de x_n (il suffit pour cela d'appliquer deux fois la formule qui définit la récurrence).
   16. (a) $x_n \not\to a$ s'il existe **un** $\varepsilon > 0$ pour lequel **on ne peut trouver de tel** n_0. Or ne pouvoir trouver un tel n_0 revient à dire qu'il existe des n arbitrairement grands pour lesquels $|x_n - a| \geq \varepsilon$, ou, de façon équivalente, une infinité de n tels que $|x_n - a| \geq \varepsilon$. Donc, en définitive, $x_n \not\to a$ est équivalent à: il existe un $\varepsilon > 0$ pour lequel $|x_n - a| \geq \varepsilon$ pour une infinité de n.
       (b) Cela veut dire qu'aucun nombre a ne satisfait la définition d'une limite. Donc, en vertu du (a), cela veut dire: pour tout $a \in \mathbf{R}$, on peut trouver un $\epsilon > 0$ pour lequel $|x_n - a| \geq \varepsilon$ pour une infinité de n.
   20. Soit L la limite. Appliquez la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et voyez ce que cela implique.