Exercices supplémentaires aux travaux pratiques 2 et 3

1. Il n'est pas vrai que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 0$. Donc expliquer ce qui n'est pas correct dans la pseudo-preuve suivante.

   Pseudo-preuve: montrons que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 0$. *Soit* $\varepsilon > 0$. *On a*

   $$\left|\frac{n}{n+1} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

   Or la dernière inégalité est vraie dès que $n+1 > 1/\varepsilon$ *et est donc satisfaite pour tout* $n \geq n_0$ *si on choisit un entier* n_0 *tel que* $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. *Donc* $\left|\frac{n}{n+1} - 0\right| < \varepsilon$ *pour tout* $n \geq n_0$.

2. Donner un exemple de

   (a) deux suites divergentes (a_n) et (b_n) telles que $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ existe;

   (b) deux suites divergentes (a_n) et (b_n) telles que $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ n'existe pas;

   (c) existe-t-il deux suites (a_n) et (b_n), la première convergente et la seconde divergente, telles que $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ existe?

   (d) existe-t-il deux suites (a_n) et (b_n), la première convergente et la seconde divergente, telles que $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ n'existe pas?

3. Entrez un nombre positif quelconque a dans votre calculatrice, puis appuyez à répétition sur la touche $\sqrt{\ }$. Qu'observez-vous? Quelle suite êtes-vous en train de générer?

4. (a) Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites majorées. Montrer que

   $$\sup\{a_n + b_n : n \geq 1\} \leq \sup\{a_n : n \geq 1\} + \sup\{b_n : n \geq 1\}.$$

   (b) Donner un exemple de deux suites majorées $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ pour lesquelles on a

   $$\sup\{a_n + b_n : n \geq 1\} < \sup\{a_n : n \geq 1\} + \sup\{b_n : n \geq 1\}.$$

   (c) On a montré au cours que si A et B sont deux ensembles majorés, et si on définit $C := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$, alors on a $\sup C = \sup A + \sup B$. Pourquoi l'exemple en (b) ne contredit-il pas ce résultat?

5. Cassidy et Lavertu, p. 52 à 55, numéros 2,4,5,16,20.