Analyse 1
6 avril 2016

Travaux pratiques 5

Directives: Les exercices 1 à 3 sont à remettre à la fin de la période (1 copie par équipe).

1. Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle converge. Dans le cas où il y a convergence, dire si la convergence est absolue ou conditionnelle.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\log n}$

2. Pour chacune des séries entières suivantes,

   (i) Trouver une formule pour a_n qui permet de l'écrire sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$;

   (ii) calculer le rayon de convergence R;

   (iii) dans le cas où $0 < R < \infty$, déterminer si la série converge en R, et si elle converge en $-R$.

   (a) $\displaystyle\frac{x}{3}-\frac{2x^2}{5}+\frac{3x^3}{7}-\frac{4x^4}{9}+\frac{5x^5}{11}+\dots$ (b) $\displaystyle\frac{x^3}{2}+\frac{x^6}{8}+\frac{x^9}{18}+\frac{x^{12}}{32}+\frac{x^{15}}{50}+\frac{x^{18}}{72}+\dots$

   [Suggestion: tester pour la convergence absolue, et utiliser le lemme établi au cours.]

3. En utilisant les résultats sur les séries entières, calculer la valeur des séries suivantes. Bien justifier la démarche (c'est-à-dire s'assurer de vérifier que les hypothèses des théorèmes utilisés sont satisfaites).

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$

   [Suggestion: pour (a), remarquer que $n^2 = n(n+1) - n$.]

Exercices supplémentaires

4. Cassidy et Lavertu, Chapitre 6, numéros 2 à 6, 8, 9*, 11, 12.

5. Cassidy et Lavertu, Chapitre 6, exercices 25 à 27.

6. Utiliser les séries entières pour calculer les séries suivantes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^{2n+1}}$ Réponse: $7/18$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^n}$ Réponse: $\displaystyle\frac{\sqrt{2}}{2} \log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$