**Corrigé des Travaux pratiques 5**

**Directives:** Les exercices 1 à 3 sont à remettre à la fin de la période (1 copie par équipe).

1. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$

   Il s'agit d'une série alternée. Comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ décroît et tend vers 0, le critère de Leibniz permet de dire qu'elle converge. Cependant, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right| =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car c'est une série de la forme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, et comme $p<1$, elle diverge par un résultat vu au cours. Ainsi la convergence est conditionnelle.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\log n}$

   Il s'agit encore une fois d'une série alternée. On a que $\dfrac{1}{n\log n}$ decroît et tend vers 0. Donc, par Leibniz, la série converge. Pour la convergence absolue, appliquons le critère de condensation à la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$. Le critère peut être utilisé car $\dfrac{1}{n\log n}$ decroît. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{2^k\log 2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\log 2}$ qui diverge. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$, et la série originale converge conditionnellement.

2. Rappel: On a vu au cours que le rayon de convergence $R$ d'une série entière est caractérisé par le fait que la série converge absolument pour tout $x\in(-R,R)$, et diverge pour tout $x\notin(-R,R)$.

   (a) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{2x^2}{5}+\dfrac{3x^3}{7}-\dfrac{4x^4}{9}+\dfrac{5x^5}{11}+\dots$ Les coefficients sont donnés par $a_0=0$ et $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n+1}$ pour $n\geq 1$.

   Utilisons le critère du rapport pour déterminer où la série converge absolument. On a

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)|x|^{n+1}}{2(n+1)+1}}{\frac{n|x|^n}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|x|(2n+1)}{n(2n+3)}=|x|.$$

   Par le critère du rapport, on a que la série converge absolument pour $|x|<1$ et ne converge pas absolument pour $|x|>1$. Il suit que $R=1$. Si $x=1$ ou $x=-1$, on a que le terme général $(-1)^{n+1}x^n\frac{n}{2n+1}$ ne tend pas vers 0 (car, en valeur absolue, il tend vers $1/2$). Ainsi la série diverge en $\pm 1$.

(b) $\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^6}{8}+\dfrac{x^9}{18}+\dfrac{x^{12}}{32}+\dfrac{x^{15}}{50}+\dfrac{x^{18}}{72}+\dots$

Ici, on a $a_n=0$ si $n=0$ ou $n$ n'est pas un multiple de 3, et $a_n=\frac{1}{2k^2}$ si $n=3k$. Testons la convergence absolue au moyen du critère du rapport:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{|x|^{3(k+1)}}{2(k+1)^2}}{\frac{|x|^{3k}}{2k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^2|x|^3}{(k+1)^2}=|x|^3.$$

Par le critère du rapport, on a que la série converge absolument si $|x|<1$ et ne converge pas absolument si $|x|>1$. Donc $R=1$. Si $x=\pm1$, la série converge absolument car dans ce cas on a

$$\frac{|x^{3k}|}{2k^2}=\frac{1}{2k^2}$$

et on a vu au cours que la série $\sum\dfrac{1}{2k^2}$ converge.

3. (a) Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ est 1, et la valeur de la somme sur $(-1,1)$ est $1/(1-x)$. On sait qu'on peut dériver la série terme à terme autant de fois qu'on veut à l'intérieur de l'intervalle de convergence. On obtient alors, pour $x\in(-1,1)$, les formules

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Cette dernière équation nous donne

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^{n-1}=\frac{2x}{(1-x)^3}.$$

Puisque $\frac{1}{3}\in(-1,1)$, on peut appliquer ces formules avec $x=\frac{1}{3}$ et on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^{(n-1)}}=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{3^{(n-1)}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{(n-1)}}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}+\frac{\frac{2}{3}}{(1-\frac{1}{3})^3}\right]=\frac{3}{2}.$$

(b) Pour calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^n}$, on utilise les valeurs de la série géométrique et de sa dérivée, cette fois-ci en $\frac{1}{2}\in(-1,1)$.

On a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=5$$