ANALYSE 1
18 avril 2016

Travaux pratiques 6

Directives: Les exercices 1 et 2 sont à remettre à la fin de la période (1 copie par équipe).

1. (6 points) On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
   (a) La fonction f est-elle continue en 1? Justifier.
   (b) La fonction f est-elle continue en 0? Justifier.
   (c) La fonction f est-elle continue en $\sqrt{2}$? Justifier.

2. (4 points) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Supposons que $f(x) < 0$ pour $x \in (-\infty, 0)$, et que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$. Montrer qu'il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$.

   [Aide: on rappelle la définition de $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$: *pour toute suite* (x_n) *telle que* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, *on a* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 2$. Utiliser les hypothèses de l'exercice pour trouver un intervalle $[a, b]$ auquel on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie.]

Exercices supplémentaires

3. Soit $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$, soit $a = 1/2$, et soit $\varepsilon = 1/10$. Trouver un $\delta > 0$ tel que
$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

4. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que $f(x) < 0$ pour tout $x < 0$. En utilisant une des deux définitions de la continuité, montrer que $f(0) \leq 0$. Montrer par un exemple qu'il est possible d'avoir l'égalité.

6. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, soit $a \in \mathbb{R}$, et supposons que $f(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe un intervalle $(a - \delta, a + \delta)$ (où $\delta > 0$), tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a - \delta, a + \delta)$. [Suggestion: adapter l'argument utilisé à l'exercice 2.]

7. Soit $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ la fonction de Thomae définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ où } (p,q) = 1 \\ 0 & \text{si } x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

On a vu au cours que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ pour tout $a \in (0,1)$ irrationnel.

(a) Se convaincre que la même démonstration donne $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ quel que soit $a \in (0,1)$.

(b) Soit la suite $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ qui tend vers $a = \frac{1}{2}$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{5}$. Calculer explicitement le rang n_0 à partir duquel on a $|f(x_n)| < \varepsilon$.

(c) Même question avec $a = \sqrt{2} - 1$ et la suite $(x_n) = (0,\ 0.4,\ 0.41,\ 0.414,\ 0.4142, \ldots)$ et $\varepsilon = .05$. (Au besoin, on utilisera une calculatrice ou Maple pour obtenir les autres termes de la suite, qui sont donnés par le développement décimal de $\sqrt{2} - 1$.)