Analyse 1
20 janvier 2016

Corrigé des travaux pratiques 1

1. (a) Par exemple, on a
$$\frac{n+2}{2n+7} \leq \frac{n+2}{2n+4} = \frac{1}{2}$$
et
$$\frac{n+2}{2n+7} \geq \frac{n}{2n+7} \geq \frac{n}{2n+7n} = \frac{1}{9}.$$
   (b) On a
$$\left|\frac{2x+5}{x-5}\right| \geq \frac{|2x+5|}{|x|+5} \geq \frac{||2x|-5|}{|x|+5} = \frac{5-|2x|}{|x|+5} > \frac{5-4}{|x|+5} > \frac{5-4}{2+5} = \frac{1}{7}.$$
et
$$\left|\frac{2x+5}{x-5}\right| \leq \frac{|2x|+5}{||x|-5|} = \frac{|2x|+5}{5-|x|} < \frac{4+5}{5-|x|} < \frac{4+5}{5-2} = 3.$$

2. Rappelons que
$$E = \left\{\frac{n^2}{n^2+2} : n \in \mathbf{N}\right\}.$$
Pour vérifier que 1 satisfait la première condition de la définition de $\sup A$, il suffit d'écrire
$$\frac{n^2}{n^2+2} \leq \frac{n^2+2}{n^2+2} = 1.$$
Pour vérifier que 1 satisfait la deuxième condition, considérons un $S' < 1$. On cherche un élément de E, c'est-à-dire un nombre de la forme $n^2/(n^2+2)$ avec $n \in \mathbf{N}$, qui satisfait
$$\frac{n^2}{n^2+2} > S'.$$
Or
$$\frac{n^2}{n^2+2} > S' \iff n^2 > n^2 S' + 2S' \iff n^2(1-S') > 2S' \iff n^2 > \frac{2S'}{1-S'},$$
où, pour la dernière équivalence, on a utilisé le fait que $1 - S' > 0$ pour pouvoir diviser sans renverser l'inégalité.

Maintenant, il est toujours possible de trouver un nombre naturel qui satisfait la dernière inégalité ci-dessus: si $S' \leq 0$ n'importe quel n fait l'affaire, et sinon il n'y a qu'à choisir un $n > \sqrt{\dfrac{2S'}{1-S'}}$.

3. (a) On peut identifier $E = \{x \in \mathbf{R} : |x^2 - 2| < 1\}$:

$$|x^2-1| < 1 \iff -1 < x^2-2 < 1 \iff 1 < x^2 < 3 \iff -\sqrt{3} < x < -1 \text{ ou } 1 < x < \sqrt{3},$$

d'où $E = (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$, et donc $\inf E = -\sqrt{3}$ et $\sup E = \sqrt{3}$.

(b) Posons $E = \left\{ \frac{(-1)^n}{2n+1} : n \in \mathbf{N} \right\}$. Comme

$$\left| \frac{(-1)^n}{2n+1} \right| = \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{3}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble est minoré par $-1/3$ et majoré par $1/3$. Comme $-1/3 \in E$, c'est automatiquement la borne inférieure (on peut prendre $x = -1/3$ dans la définition). Un examen des premiers éléments de l'ensemble suggère que la borne supérieure est $1/5$. Montrons que c'est le cas. D'abord $1/5$ est un majorant car

- si n est impair, $\frac{(-1)^n}{2n+1} < 0 \leq \frac{1}{5}$
- si n est pair, $\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2 \cdot 2 + 1} \leq \frac{1}{5}$.

Ici aussi, le fait que $1/5$ soit le plus petit majorant découle du fait que $1/5 \in E$.

4. (a) On a, en appliquant deux fois l'inégalité des moyennes géométrique et arithmétique:

$$(x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}} \leq \frac{\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_3x_4}}{2} \leq \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}.$$

(b) Suivant la suggestion, on a

$$(y_1y_2y_3A)^{\frac{1}{4}} \leq \frac{y_1 + y_2 + y_3 + A}{4} = \frac{3A + A}{4} = A.$$

En divisant par $A^{\frac{1}{4}}$ des deux côtés, on obtient

$$(y_1y_2y_3)^{\frac{1}{4}} \leq A^{\frac{3}{4}}$$

et le résultat suit en prenant la puissance $4/3$ des deux côtés.

Corrigé partiel des exercices supplémentaires et indications

5. CL1 On divise par 0 à la 4ème ligne

CL3(a) Réponse: l'inégalité est vérifiée pour $x < x_1$ et pour $x > x_2$, où $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

CL3(b) Réponse: les intervalles de solutions sont $(1, +\infty)$ et $(-\infty, -1)$.

CL3(d) Réponse: $0 < x < 1$.

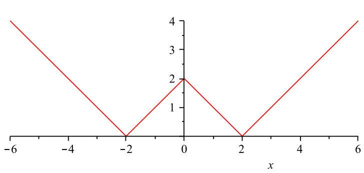
CL9(a) Solution: d'après l'inégalité triangulaire, on a $2 = |(x+1)-(x-1)| \leq |x+1| + |x-1|$. Donc il n'y a aucune valeur de x qui satisfait l'inégalité étudiée.

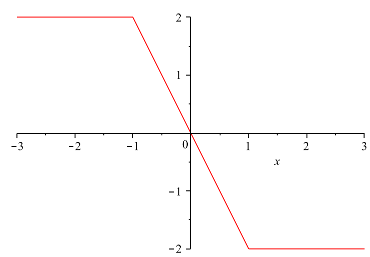
CL9(b) Réponse: l'inégalité étudiée est satisfaite pour $x_1 \leq x \leq x_2$, où $x_1 := \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$ et $x_2 := \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$.

CL10 Aide: sans perte de généralité, on peut supposer que $x \leq y$. Il suffit alors, pour chaque équation, de calculer les deux membres et de constater qu'ils sont égaux.

6. Réponse: Les x cherchés sont ceux qui satisfont $x_1 < x < t_1$, ainsi que ceux qui satisfont $t_2 < x < x_2$, où $x_1 := \dfrac{-2-\sqrt{44}}{2}$, $x_2 := \dfrac{-2+\sqrt{44}}{2}$, $t_1 := \dfrac{-2-\sqrt{28}}{2}$ et $t_2 := \dfrac{-2+\sqrt{28}}{2}$.

7. Réponses:





8. Solution: Pour $f+g$, il y a trois cas à vérifier. D'abord, si $x < -1$, alors $f(x) = 2x$ et $g(x) = x^2$, d'où $f(x)+g(x) = x^2+2x$. Si $-1 \leq x \leq 1$, alors $f(x) = 2x$ et $g(x) = x^2+1$, d'où $f(x)+g(x) = x^2+2x+1$. Finalement, si $x > 1$, alors $f(x) = x+1$ et $g(x) = x^2+1$, d'où $f(x)+g(x) = x^2+x+2$. Ceci peut être résumé par la formule

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2+2x & \text{si } x < -1 \\ x^2+2x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2+x+2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Ensuite, rappelons que $f \circ g(x) = f(g(x))$ (c'est-à-dire on calcule g d'abord). Ainsi, on a

$$f(g(x)) = \begin{cases} f(x^2) & \text{si } x < -1 \\ f(x^2+1) & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

Ainsi, si $x < -1$, il faut calculer $f(x^2)$, et pour ce faire il faut d'abord aller voir si $x^2 \leq 1$ ou si $x^2 > 1$. Or si $x < -1$, on a $x^2 > 1$ et donc dans ce cas

$$f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1.$$

Maintenant, si $x \geq -1$, on doit calculer $f(x^2+1)$, et pour ce faire il faut voir si x^2+1 est ≤ 1 ou > 1. Comme le carré d'un nombre réel est toujours ≥ 0, on a toujours $x^2+1 \geq 1$, et on a $x^2+1 = 1$ si et seulement si $x = 0$. Ainsi, pour les $x \geq -1$ différents de 0, on utilise la deuxième branche de la définition de f pour obtenir

$$f(x^2+1) = (x^2+1)+1 = x^2+2.$$

Pour $x = 0$, on a

$$f(g(0)) = f(1) = 2.$$

Ceci peut être résumé par la formule

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < -1 \\ x^2+2 & \text{si } x \geq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Dans l'autre sens

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(2x) & \text{si } x \leq 1 \\ g(x+1) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On trouvera après calculs

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{si } x < -1/2 \\ 4x^2+1 & \text{si } -1/2 \leq x \leq 1 \\ x^2+2x+2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

9. Solution: Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire deux fois: $|x+y+z| \leq |x+y|+|z| \leq |x|+|y|+|z|$.

11. (b) Il faut choisir $A = (x_1 + \cdots + x_m)/m$ et calculer.

12. (a) Solution: Si $x \in A$, on a $x \leq \sup A \leq \max(\sup A, \sup B)$. De même, si $x \in B$, on a $x \leq \sup B \leq \max(\sup A, \sup B)$. Si $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$, et dans les deux cas on a $x \leq \max(\sup A, \sup B)$. Ainsi $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$. On doit montrer aussi que si $\varepsilon > 0$, alors il existe un $x \in A \cup B$ tel que $x > \max(\sup A, \sup B) - \varepsilon$. Sans perte de généralité, supposons que $\max(\sup A, \sup B) = \sup A$. Par la définition de $\sup A$ (propriété (ii)), il existe $a \in A$ tel que $a > \sup A - \varepsilon = \max(\sup A, \sup B) - \varepsilon$. Il suffit de prendre $x = a$.

(b) Aide: imiter la preuve de $\inf\{-x : x \in A\} = -\sup A$ faite au cours, avec les modifications appropriées.

(c) Solution: Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et donc $x \leq \sup A$. Aussi $x \in B$, et donc $x \leq \sup B$. Il suit que $x \leq \min(\sup A, \sup B)$. Ainsi $\min(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cap B$, et est donc $\geq$ au plus petit majorant de $A \cap B$, qui est $\sup(A \cap B)$. Si on prend $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 3\}$, on a l'inégalité stricte.

13. Les réponses sont données dans le tableau ci-dessous:

	$\sup A$	$\inf A$	$\sup A \in A$	$\inf A \in A$
(a)	1	-1	oui	oui
(b)	$\sqrt{2}$	0	non	oui
(c)	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	non	non
(d)	$3/2$	-1	oui	non
(e)	aucun	aucun	—	—
(f)	2	aucun	oui	—
(g)	1	-1	non	non
(h)	2	0	oui	non
(i)	1	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	non	non