ANALYSE 1
20 janvier 2016

Travaux pratiques 1

Directives: Les exercices 1 à 4 sont à remettre à la fin de la période (1 copie par équipe). Les exercices supplémentaires sont pour travail personnel. (Les exercices marqués d'une * sont ou bien plus difficiles, ou bien débordent de la matière qui sera évaluée.)

1. (2 points)

   (a) Trouver deux nombres réels $m > 0$ et $M > 0$ tels que
   $$m \leq \frac{n+2}{2n+7} \leq M$$
   pour tout $n \in \mathbf{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.

   (b) Montrer que si $x \in \mathbf{R}$ satisfait $|x| < 2$, alors on a
   $$\frac{1}{7} < \left|\frac{2x+5}{x-5}\right| < 3.$$

2. (2 points) Soit
   $$E = \left\{ \frac{n^2}{n^2+2} : n \in \mathbf{N} \right\}.$$
   Montrer que $S = 1$ est la borne supérieure de E en vérifiant qu'elle satisfait les deux conditions de la définition.

3. (4 points) Pour chacun des sous-ensembles de $\mathbf{R}$ suivants déterminer s'il est minoré et s'il est majoré. Le cas échéant, déterminer l'infimum et le supremum.

   (a) $\{x \in \mathbf{R} : |x^2 - 2| < 1\}$

   (b) $\left\{ \frac{(-1)^n}{2n+1} : n \in \mathbf{N} \right\}$

4. (2 points)

   (a) Soient $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ quatre nombres réels. En appliquant l'inégalité des moyennes géométrique et arithmétique à $\sqrt{x_1 x_2}$ et $\sqrt{x_3 x_4}$, montrer que
   $$(x_1 x_2 x_3 x_4)^{\frac{1}{4}} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}.$$

   (b) Déduire que pour n'importe quels trois nombres réels $y_1, y_2, y_3 > 0$, on a
   $$(y_1 y_2 y_3)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$
   [Suggestion: appliquer le (a) aux nombres y_1, y_2, y_3 et A, où $A = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.]

Exercices supplémentaires

5. Cassidy et Lavertu, pages 27, 28, exercices 1, 3(a),(b),(d), 9, 10.

6. Trouver tous les nombres réels x qui satisfont $|x-2| \cdot |x+4| < 2$.

7. Tracer le graphe des fonctions

   (a) $f(x) = \big||x|-2\big|$

   (b) $f(x) = |1-x| - |x+1|$

8. On définit les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

   Calculer les fonctions $f+g$, $f \circ g$ et $g \circ f$. [

9. Montrer que pour $x, y, z \in \mathbf{R}$, on a

$$|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|.$$

   (Suggestion: ne procédéz pas par cas! Utilisez l'inégalité triangulaire.)

10. Pour $x, y > 0$, on définit la *moyenne harmonique* $h(x,y)$ de x et y par

$$\frac{1}{h(x,y)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

   (a) Vérifier que la moyenne harmonique de deux nombres est toujours inférieure ou égale à leur moyenne géométrique.

   (b) La moyenne harmonique apparaît naturellement quand on calcule des taux moyens. En effet, vérifier que si on effectue le voyage Québec–Montréal à la vitesse moyenne v_a à l'aller et la vitesse moyenne v_r au retour, alors la vitesse moyenne du trajet aller-retour complet est $h(v_a, v_r)$.

11. * Cet exercice vise à généraliser le résultat de l'exercice 4.

   (a) Soit n un nombre naturel de la forme $n = 2^k$ où $k \in \mathbf{N}$. Montrer qu'on a

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

   pour n'importe quels nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$.
   [Suggestion: procéder par induction sur k.]

(b) Déduire que pour m un entier quelconque, on a

$$(x_1 x_2 \cdots x_m)^{\frac{1}{m}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}$$

pour n'importe quels nombres $x_1, x_2, \ldots, x_m > 0$.
[Suggestion: dans le cas où m n'est pas de la forme considérée en (a), choisir k tel que $2^k < m < 2^{k+1}$, et appliquer le résultat précédent aux nombres $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et A répété $2^{k+1} - m$ fois, pour un A bien choisi.]

12. Soient A et B deux sous-ensembles bornés de $\mathbf{R}$. Montrer que

(a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

(b) $\sup\{2x : x \in A\} = 2 \sup A$

(c) si $A \cap B \neq \emptyset$, on a $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$, mais l'inégalité peut être stricte.

13. Cassidy et Lavertu, page 28, numéro 11.