Corrigé des Travaux pratiques 2

1. On a:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= \frac{1}{1}(1) = 1 \\ x_3 &= \frac{1}{2}(1+1) = 1 \\ x_4 &= \frac{1}{3}(1+1+1) = 1 \end{aligned}$$

2. (a) On a

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2(n+1)-1))}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2(n+1))}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))}{2\cdot 3\cdot 6\cdots(2n)}} = \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1))}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2))}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))}{2\cdot 3\cdot 6\cdots(2n)}} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

et donc la suite est strictement décroissante.

(b) On a

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!}\right] \\ &\quad - \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{nn!}\right] \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

et par conséquent la suite est strictement décroissante.

3. (a) Par exemple, si $a_n = (-1)^n$, on a $E_k = \{-1, 1\}$ pour tout k.

(b) Par exemple, $a_n = 1/n$.

(c) Non. On a $E_{k+1} = \{a_{k+1}\} \cup E_k$. Ainsi E_{k+1} est fini si et seulement si E_k est fini. Ainsi, si E_1 est fini, alors tous les E_k suivants seront finis, et si E_1 est infini, alors tous les E_k suivants seront infinis.

(d) Il suffit de montrer que si un des E_k est majoré, alors la suite est majorée. Supposons qu'il existe un k tel que E_k est majoré, disons $x \leq M_1$ pour tout $x \in E_k$. Cela veut dire $a_n \leq M_1$ si $n \geq k$. Posons $M := \max(M_1, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1})$. On a alors $a_n \leq M$ pour tout n.

(e) Si M est un majorant de la suite, alors $a_n \leq M$ pour tout n. En particulier, $x \leq M$ pour tout $x \in E_k$.

(f) Il suit de la définition des E_k que $E_{k+1} \subseteq E_k$. Puisque $\sup E_k$ est un majorant de E_k, il est donc aussi un majorant de E_{k+1}. Il est donc $\geq$ au plus petit majorant de E_{k+1}, c'est-à-dire $\sup E_k \geq \sup E_{k+1}$, ce qui est la même chose que $b_k \geq b_{k+1}$.

(g) (d') (contrapposée) Si un des E_k est minoré, alors la suite est minorée. Preuve: supposons qu'il existe un k tel que E_k est minoré, disons $x \geq m_1$ pour tout $x \in E_k$. Cela veut dire $a_n \geq m_1$ si $n \geq k$. Posons $m := \min(m_1, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1})$. On a alors $a_n \geq m$ pour tout n. (e') Si la suite est minorée, alors tous les E_k sont minorés. Preuve: si m est un minorant de la suite, alors $a_n \geq m$ pour tout n. En particulier, $x \geq m$ pour tout $x \in E_k$. (f') Si la suite est minorée, alors les c_k forment une suite croissante. Preuve: puisque $\inf E_k$ est un minorant de E_k, il est donc aussi un minorant de E_{k+1} car $E_{k+1} \subseteq E_k$. En particulier, il est $\leq$ au plus grand minorant de E_{k+1}, ce qui veut dire $\inf E_k \leq \inf E_{k+1}$, c'est-à-dire $c_k \leq c_{k+1}$.

4. Puisqu'entre deux nombres réels distincts on peut toujours trouver un nombre rationnel, pour chaque $\alpha \in A$, il existe un rationnel, que nous noterons r_α, entre a_α et b_α. Définissons $\varphi\colon A \to \mathbb{Q}$ par $\varphi(\alpha) = r_\alpha$. La fonction φ est injective: si $\alpha \neq \alpha'$, alors $r_\alpha \in (a_\alpha, b_\alpha)$ et $r_{\alpha'} \in (a_{\alpha'}, b_{\alpha'})$. Or les intervalles (a_α, b_α) et $(a_{\alpha'}, b_{\alpha'})$ sont disjoints. Donc on a $r_\alpha \neq r_{\alpha'}$. La fonction φ est donc une bijection entre A et son image $\varphi(A)$. Comme $\varphi(A) \subseteq \mathbb{Q}$, il est fini ou dénombrable, et donc il en est ainsi de A.