Analyse 1
10 février 2016

Corrigé des Travaux pratiques 3

1. (a) Soit $\varepsilon > 0$. On cherche un rang n_0 tel qu'on ait $\left|\dfrac{2n+1}{2n-1} - 1\right| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. On a:

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n+1}{2n-1} - 1\right| = \frac{2}{2n-1} < \varepsilon &\iff 2n-1 > \frac{2}{\varepsilon} \\ &\iff n > \frac{\frac{2}{\varepsilon}+1}{2}\end{aligned}$$

Or, par la propriété archimédienne des nombres réels, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > \frac{\frac{2}{\varepsilon}+1}{2}$. Puisque les inégalités ci-dessus sont équivalentes, on aura donc $\left|\dfrac{2n+1}{2n-1} - 1\right| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

(b) On rappelle une partie du théorème:

Théorème. (Opérations sur les limites) *Supposons que* $\lim a_n = a$ *et* $\lim b_n = b$. *Alors*

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

(c) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$

(e) Si les $b_n, b \neq 0$, *alors* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$

D'abord, on écrit

$$\frac{2n+1}{2n-1} = \frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}.$$

On a vu au cours que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc en appliquant (b) aux suites définies par $a_n = 2$ (qui tend trivialement vers 2), et $b_n = \frac{1}{n}$, on a $\lim_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$. De la même façon, (c) donne $\lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2$. Finalement, puisque $2 - 1/n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $2 \neq 0$, (e) (avec $a_n = 2+\frac{1}{n}$ et $b = 2-\frac{1}{n}$) donne $\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{2}{2} = 1$.

(c) On a

$$\left|\frac{2n+1}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{2n+3}{4n-2} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n+3 < 4n\varepsilon - 2\varepsilon \Leftrightarrow n(4\varepsilon - 2) > 3 + 2\varepsilon$$

Si on prend $\varepsilon = \frac{1}{4}$, cette dernière inégalité devient $-n > 3 + \frac{1}{2}$, qui n'est satisfaite pour **aucun** n, donc certainement pas à partir d'un n_0.

2. On a $\lim_{n\to\infty} x_n = I$, où $I = \inf E$, où $E := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Démonstration: soit $\varepsilon > 0$. Puisque $I + \varepsilon > I$, il existe un élément de E, disons x_{n_0}, tel que $x_{n_0} < I + \varepsilon$ (c'est la deuxième condition dans la définition de la borne inférieure). Puisque la suite est décroissante, on a $x_n \leq x_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, on a

$$x_n \leq x_{n_0} < I + \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

   Par ailleurs, puisque I est un minorant de la suite, on a $x_n \geq I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en particulier $x_n > I - \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. En combinant avec l'inégalité précédente, on a que $I - \varepsilon < x_n < I + \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

3. D'après un théorème du cours, toute suite convergente est bornée. Donc il existe $T \geq 0$ tel que $|a_n| \leq T$ pour tout n. Donc on a

$$|a_n^2 + (-1)^n a_n| \leq |a_n^2| + |(-1)^n a_n| = |a_n|^2 + |a_n| \leq T^2 + T$$

   et la suite considérée est bien bornée.

4. Prenons $\varepsilon = 1/200$. Par la définition de limite, on sait qu'il existe un n_0 tel que

$$|a_n - \ell| < \frac{1}{200} \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

   Pour la même raison, il existe un n_1 tel que

$$|b_n - \ell| < \frac{1}{200} \quad \text{pour tout } n \geq n_1.$$

   Posons $N = \max(n_0, n_1)$. Si $n \geq N$, alors les deux inégalités ci-dessus sont valides et on a

$$|a_n - b_n| = |(a_n - \ell) - (b_n - \ell)| \leq |a_n - \ell| + |b_n - \ell| < \frac{1}{200} + \frac{1}{200} = \frac{1}{100},$$

   tel que demandé.

5. (a) Prenons $\varepsilon = 1/2$. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, il existe un rang n_0 tel que

$$|a_n - 1| < \frac{1}{2}$$

   pour tout $n \geq n_0$. En particulier, on a

$$a_n < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{pour tout } n \geq n_0 \tag{1}$$

   De même, puisque $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$, il existe un rang n_1 tel que

$$|b_n - 2| < \frac{1}{2}$$

pour tout $n \geq n_1$. En particulier, on a

$$b_n > 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ pour tout } n \geq n_1 \tag{2}$$

Posons $N := \max(n_0, n_1)$. Si $n \geq N$, alors $n \geq n_0$ et $n \geq n_1$, et donc par (1) et (2), on a

$$b_n > \frac{3}{2} > a_n,$$

et donc $a_n \neq b_n$, tel que désiré.

(b) La généralisation est: *Soient* $(a_n)_{n\geq 1}$ *et* $(b_n)_{n\geq 1}$ *deux suites, et supposons que* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \lim_{n\to\infty} b_n$. *Alors il existe un rang* N *tel que* $a_n \neq b_n$ *pour tout* $n \geq N$. La preuve serait la même, sauf qu'il faudrait ici prendre $\varepsilon = |a - b|/2$, où $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ et $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.