Analyse 1
10 février 2016

Corrigé des Travaux pratiques 4

1. (a) Si la limite L existe, alors puisque $x_{n+1} \to L$, on aura

$$L = \sqrt{6+L}.$$

Ainsi L sera solution de l'équation quadratique $L^2 = 6 + L$, dont les solutions sont -2 et 3. Cependant, seule 3 est une solution de léquation $L = \sqrt{6+L}$ car la racine carrée est positive. Ou encore, comme les termes de la suite seront clairement positifs, la suite ne peut converger vers -2 et donc la seule limite possible est 3.

(b) Le graphe de $y = \sqrt{6+x}$ est la branche supérieure de la parabole d'équation $x = y^2 - 6$. Pour $x > 0$, il rencontre la diagonale $y = x$ au point $(3, 3)$ d'après les calculs faits en (a). De plus, puisque $y'(x) = 1/2\sqrt{3+x}$, y croît avec x mais sa pente est inférieure à 1.

Le diagramme d'itération suggère que la suite est croissante et tend vers 3.

(c) Montrons que

- $x_n \leq 3$ pour tout $n \geq 1$.
- $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \geq 1$

Pour le premier point, procédons par induction. Puisque $x_1 = 2$, la relation est vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie pour n, c'est-à-dire $x_n \leq 3$. On a alors $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} \leq \sqrt{6+3} = 3$, ce qui complète l'induction. Pour le deuxième point, procédons encore par induction. Puisque $x_2 = \sqrt{8} > 2 = x_1$, la relation est vraie pour $n = 1$. Supposons que $x_{n+1} \geq x_n$. Alors $\sqrt{6+x_{n+1}} \geq \sqrt{6+x_n}$, c'est-à-dire $x_{n+2} \geq x_{n+1}$ et ceci complète l'induction.

Puisque la suite est croissante et majorée, elle converge. En utilisant (a), on conclut que $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

2. (a) Soit $M \in \mathbb{R}$. On doit montrer qu'il existe N tel que $b_n > M$ pour tout $n \geq N$. Or, puisque $a_n \to +\infty$, il existe n tel que $a_n > M$ pour tout $n \geq N$. Puisque $b_n \geq a_n$, on a donc $b_n > M$ pour tout $n \geq N$.

(b) On a

$$a^n = (1 + (a-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-a)^k \geq \frac{n(n-1)}{2}(1-a)^2.$$

Ainsi,

$$\frac{a^n}{n} \geq \frac{(n-1)(1-a)^2}{2}.$$

Comme $\lim_{n\to\infty}(n-1)(1-a)^2/2 = +\infty$, le (a), appliqué avec $b_n = a^n/n$ et $a_n = (n-1)(a-1)^2/2$ donne le résultat voulu.

3. (a) Le résultat est évident si $n = 1$. Supposons le résultat vrai pour $n = k$. On a alors

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \le \frac{|x_{k+1} - x_k|}{2} \le \frac{1}{2}\frac{|x_2 - x_1|}{2^{k-1}} = \frac{|x_2 - x_1|}{2^k}.$$

Ainsi le résultat est également vrai pour $k + 1$, ce qui complète l'induction.

(b) On a

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)| \\
&\le |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\le \left(\frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)|x_2 - x_1| \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1 - (\frac{1}{2})^{m-n}}{1 - \frac{1}{2}} \times |x_2 - x_1| \le \frac{1}{2^{n-2}}|x_2 - x_1|
\end{aligned}$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_2 - x_1|}{2^{n-2}} = 0$, il existe N tel que $\dfrac{|x_2 - x_1|}{2^{n-2}} < \varepsilon$ pour tout $n \ge N$. En utilisant l'inégalité de (c), on a alors que pour tous les $m > n \ge N$, $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Ainsi la suite est de Cauchy.

(d) Oui, parce que par un théorème du cours toute suite de Cauchy converge.

Corrigé partiel des exercices supplémentaires

4. Solution: On procède par contradiction. Supposons que la suite (x_n) possède une sous-suite convergente (x_{n_k}). Cette sous-suite est alors bornée. Soit M un majorant de la sous-suite. Puisque $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, il existe un rang N tel que $x_n > M$ pour tout $n \ge N$. Par conséquent il n'y a qu'un nombre fini de termes x_n qui sont $\le M$. Ceci contredit le fait que tous les x_{n_k}, qui sont en nombre infini, satisfont $x_{n_k} \le M$.

5. 9. Montrer, par induction, que la suitte est croissante et majorée par 2. La suite converge alors vers 2.

   10. Montrer, par induction, d'abord que la suite est minorée par 2, puis qu'elle est décroissante. La suite converge vers 2.

   11. La suite est définie par $x_1 = a$ et $x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$ pour $n \ge 2$. Montrer d'abord que la suite est majorée par 2, puis qu'elle est croissante.

6. 17. Solution: Soit $\varepsilon > 0$. On a toujours, pour $m, n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - x_m| \le |x_n| + |x_m| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \le \frac{2}{\min(n,m)}.$$

Choisissons N tel que $N > 2/\varepsilon$. Alors $\frac{1}{N} < \varepsilon/2$. D'après l'inégalité ci-dessus, on aura, si $m, n \ge N$,

$$|x_n - x_m| \le \frac{2}{\min(n,m)} \le \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

18. Il suffit de remarquer que la suite possède une sous-suite qui tend vers 1 et une sous-suite qui tend vers -1.

19. (a) ne l'est pas car l'ordre ne respecte pas celui de la suite. Par contre (b) l'est: on a retenu les termes de rang pair.

21. Solution: La réponse est "l'intervalle $[0, 1]$". D'abord, il est clair que la suite (a_n) contient tous les nombres rationnels $r \in]0, 1[$. Or, étant donné n'importe quel nombre réel $\alpha \in [0, 1]$, il existe une suite de nombres rationnels (r_n) appartenant à $(0, 1)$ qui converge vers α. Or les éléments de cette suite sont des termes de la suite (a_n). Pour construire une telle suite, il suffit de considérer le développement décimal de α, soit $\alpha = 0.b_1b_2b_3\ldots$, où $0 \leq b_i \leq 9$, pour $i = 1, 2, \ldots$ Alors la suite des nombres rationnels (u_n), définie par

$$u_1 = \frac{b_1}{10}, \quad u_2 = \frac{b_1b_2}{100}, \quad u_3 = \frac{b_1b_2b_3}{1000}, \ldots$$

converge évidemment vers α. Comme (u_n) est évidemment une sous-suite de (a_n), le résultat est démontré.

22. Montrer que la suite possède une sous-suite constante.

23. Solution: un exemple est

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On a $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} \to 0$, mais puisque la suite (a_n) n'est pas convergente, ce n'est pas une suite de Cauchy. Remarquer que dans cet exemple, on a même $\lim_{n\to\infty}(a_{n+k} - a_n) = 0$ quel que soit k fixé.