Analyse 1
18 avril 2016

Travaux pratiques 6
Solutions aux exercices proposés

1. (6 points) On considère la fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

   (a) La fonction f est-elle continue en 1? Justifier.
   Solution: Non. $f(1) = 1$, mais pour tout $\delta > 0$, il y a un irrationnel x tel que $|1 - x| < \delta$, alors que $f(x) = 0$.

   (b) La fonction f est-elle continue en 0? Justifier.
   Solution: Oui. $0 \leq \lim\limits_{x\to 0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

   (c) La fonction f est-elle continue en $\sqrt{2}$? Justifier.
   Solution: Non. $f(\sqrt{2}) = 0$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Mais pour tout $\delta > 0$, on peut trouver un rationnel x tel que $|\sqrt{2} - x| < \delta$, alors que $f(x)$ est près de 2 (et non de 0).

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Supposons que $f(x) < 0$ pour $x \in (-\infty, 0)$, et que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$. Montrer qu'il existe un $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 1$.

   [Aide: on rappelle la définition de $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$: *pour toute suite* (x_n) *telle que* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, *on a* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 2$. Utiliser les hypothèses de l'exercice pour trouver un intervalle $[a, b]$ auquel on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie.]

   Solution: On va trouver deux nombres réels a et b tels que $f(a) < 1$ et $f(b) > 1$. La fonction continue $g(x) := f(x) - 1$ étant de signes opposés en a et b, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe x_0 entre a et g tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = 1$. Puisque $f(x) < 0$ sur $(-\infty, 0)$, on peut prendre pour a n'importe quel nombre négatif, par exemple $a = -1$. La suite $x_n = n$ tend vers l'infini. Donc $\lim_{n\to\infty} f(n) = 2$. En particulier (en prenant $\epsilon = 1$ dans la définition de limite), il existe n_0 tel que $f(n) > 1$ pour tout $n \geq n_0$. On peut prendre $b = n_0$.

$\square$

Exercices supplémentaires

3. Soit $f\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 1/x$, soit $a = 1/2$, et soit $\varepsilon = 1/10$. Trouver un $\delta > 0$ tel que
$$|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

   Solution: On cherche $\delta > 0$ tel que $|x - \frac{1}{2}| < \delta \Longrightarrow |\frac{1}{x} - 2| < \frac{1}{10}$.

$$\begin{aligned} |\tfrac{1}{x} - 2| < \tfrac{1}{10} \quad &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{19}{10} < \tfrac{1}{x} < \tfrac{21}{10} \\ &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{10}{19} > x > \tfrac{10}{21} \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{10}{19} - \tfrac{1}{2} > x - \tfrac{1}{2} > \tfrac{10}{21} - \tfrac{1}{2} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{38} > x - \tfrac{1}{2} > \tfrac{-1}{42} \end{aligned}$$

   Avec $\delta = \frac{1}{42}$, on a bien $\frac{1}{38} > \frac{1}{42} > x - \frac{1}{2} > \frac{-1}{42}$.

4. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbf{R}$.

   Solution: Soit $a \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta = \varepsilon$. Alors $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta \quad &\Longrightarrow \quad \varepsilon = \delta > |x-a| \geq |x| - |a| \\ |x-a| < \delta \quad &\Longrightarrow \quad \varepsilon = \delta > |x-a| \geq |a| - |x| \end{aligned}$$

   Mais $||x| - |a|| = \max\{(|x| - |a|), (|a| - |x|)\}$. Donc, $||x| - |a|| < \varepsilon$.

5. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et supposons que $f(x) < 0$ pour tout $x < 0$. En utilisant une des deux définitions de la continuité, montrer que $f(0) \leq 0$. Montrer par un exemple qu'il est possible d'avoir l'égalité.

   Solution: Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que $x_n < 0$ pour tout n, et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. (Par exemple, on peut prendre $x_n = -1/n$).

   Alors $\forall n$, $f(x_n) < 0$, et donc, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0$. Mais puisque f est continue, alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$, donc $f(0) \leq 0$.

   L'égalité est possible, car il suffit de prendre $f(x) = x$.

6. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue, soit $a \in \mathbf{R}$, et supposons que $f(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe un intervalle $(a - \delta, a + \delta)$ (où $\delta > 0$), tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a - \delta, a + \delta)$. [Suggestion: adapter l'argument utilisé à l'exercice 2.]

   Solution: f est continue en a. Donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x, |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

En particulier, pour $\varepsilon = |f(a)|/2 > 0$,

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in (a-\delta, a+\delta), |f(x) - f(a)| < \frac{|f(a)|}{2}$$

Mais $|f(a)|/2 > |f(x) - f(a)| \geq |f(a)| - |f(x)|$ par l'inégalité triangulaire. Donc,

$$\forall x \in (a-\delta, a+\delta), |f(x)| > |f(a)| - \frac{|f(a)|}{2} = \frac{|f(a)|}{2} > 0$$

$\square$

7. Soit $f\colon (0,1) \to \mathbf{R}$ la fonction de Thomae définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \text{ où } (p,q) = 1 \\ 0 & \text{si } x \in (0,1) \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

On a vu au cours que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ pour tout $a \in (0,1)$ irrationnel.

(a) Soit la suite $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ qui tend vers $a = \frac{1}{2}$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{5}$. Calculer explicitement le rang n_0 à partir duquel on a $|f(x_n)| < \varepsilon$.
Solution: Pour tout n, on a que $|f(x_n)| = |f(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})| = |f(\frac{n+2}{2n})|$.
Si n est impair, $(n+2)$ et n sont sans facteur commun, et donc $|f(x_n)| = \frac{1}{2n}$.
Sinon, $|f(\frac{n+2}{2n})| = |f(\frac{(n/2)+1}{n})| = \frac{1}{n}$.
Donc, pour tout n, $|f(x_n)| \leq \frac{1}{n}$. Ainsi, pour tout $n \geq 6$, $|f(x_n)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6} < \frac{1}{5} = \varepsilon$.
Mais $n = 5$ est également une bonne valeur, car 5 est impair, donc $|f(x_5)| = \frac{1}{10} < \frac{1}{5} = \varepsilon$. La réponse est donc $n_0 = 5$.

(b) Même question avec $a = \sqrt{2}$ et la suite $(x_n) = (1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142, \dots)$ et $\varepsilon = .05$. (Au besoin, on utilisera une calculatrice ou Maple pour obtenir les autres termes de la suite, qui sont donnés par le développement décimal de $\sqrt{2}$.)
Solution: On calcule successivement,

$$\begin{aligned} &f(x_1) = f(1) = 1 \\ &f(x_2) = f(1.4) = f(\tfrac{7}{5}) = \tfrac{1}{5} \\ &f(x_3) = f(1.41) = f(\tfrac{141}{100}) = \tfrac{1}{100} \\ &f(x_4) = f(1.414) = f(\tfrac{707}{500}) = \tfrac{1}{500} \\ &f(x_5) = f(1.4142) = f(\tfrac{7071}{5000}) = \tfrac{1}{5000} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Et on constate que cette suite est décroissante, et qu'à partir de $n_0 = 3$, $|f(x_n)| < \frac{1}{5} = \varepsilon$.