Analyse 1
6 avril 2016

Exercices: limites de fonctions et continuité (définitions)

Rappels de cours

Définitions:

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si pour toute suite x_n de points du domaine de f telle que $x_n \neq a$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

(2) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ si pour toute suite x_n de points du domaine de f telle que $x_n < a$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

(3) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ si pour toute suite x_n de points du domaine de f telle que $x_n > a$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

(4) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si pour toute suite x_n de points du domaine de f telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

(5) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si pour toute suite x_n de points du domaine de f telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

(6) f est continue au point a si pour toute suite (x_n) du domaine de f telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

(N.B. Dans les 5 premières définitions, L peut représenter un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.)

Exercices

1. Montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel qu'on ait
$$0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > M.$$
[Suggestion: imiter la démonstration de la caractérisation $\varepsilon - \delta$ pour les limites finies.]

2. Formuler une définition équivalente, en termes de ε et δ, des définitions (2) et (3), dans le cas où L est une limite finie.

3. Formuler une définition équivalente, en termes de deux nombres M_1 et M_2, de la définition (4), dans le cas où $L = +\infty$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\lfloor x \rfloor$, appelé la *partie entière de* x, comme le plus grand entier n tel que $n \leq x$. Par exemple, $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$ et $\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1$.
   Calculer les limites suivantes (finies ou infinies), ou montrer qu'elles n'existent pas.

   (a) $\lim\limits_{x \to \infty} \lfloor x \rfloor$ (b) $\lim\limits_{x \to \infty} x - \lfloor x \rfloor$ (c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$ (d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{x}$

5. On définit les fonctions suivantes: $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $g(x) = x \lfloor x \rfloor$ et

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

   Déterminer pour chacune si elle est continue

   (a) au point 1 (b) au point $1/2$ (c) au point $\sqrt{2}$ (d) au point 0