ANALYSE 1
6 avril 2016

Exercices: limites de fonctions et continuité: corrigé partiel

1. Supposons que f a la propriété que
$$0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M. \tag{1}$$
Soit (x_n) une suite qui tend vers a avec $x_n \neq a$, et soit $M \in \mathbb{R}$. Par (1), il existe un $\delta > 0$ tel que $f(x) > M$ pour tout x tel que $0 < |x - a| < \delta$. Puisque $x_n \to a$, il existe un rang n_0 tel que $|x_n - a| < \delta$ pour tout $n \geq n_0$, et on a de plus $0 < |x_n - a| < \delta$ car $x_n \neq a$. On a ainsi, par (1), $f(x_n) > M$ pour tout $n \geq n_0$. Ceci montre que $f(x_n) \to \infty$.

   Pour montrer la réciproque, supposons que la propriété (1) n'est pas satisfaite. Il existe donc un M pour lequel on ne peut pas trouver de δ comme dans (1). Cela veut dire en particulier que $\delta = 1/n$ n'a pas la propriété voulue, ce qui veut dire qu'il existe un nombre x_n qui satisfait $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ mais $f(x_n) \leq M$. On a $x_n \neq a$, et $x_n \to a$ par le théorème des deux gendarmes (car $a - \frac{1}{n} \leq x_n \leq a + \frac{1}{n}$). Cependant, on n'a pas $f(x_n) \to \infty$ car $(f(x_n))$ est majorée. Donc on n'a pas $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$.

2. (2) est équivalent à: *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*
$$a - \delta < x < a \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$
et (3) est équivalent à: *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*
$$a < x < a + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

3. On a $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ si et seulement si on a: *pour tout $M_1 \in \mathbb{R}$, il existe $M_2 \in \mathbb{R}$ tel que*
$$x > M_2 \implies f(x) > M_1.$$

4. La définition de la fonction du plus grand entier implique que les inégalités
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$
sont valides pour tout x (celle de gauche est vraie du fait que, puisque $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x, on a que $\lfloor x \rfloor + 1 \not\leq x$). Ces inégalités seront fort utiles pour cet exercice.

   (a) Si x_n est une suite qui tend vers l'infini, alors puisque $\lfloor x_n \rfloor > x_n - 1$ et puisque $x_n - 1 \to \infty$, le théorème de comparaison donne que $\lfloor x_n \rfloor \to \infty$. Donc la limite est $+\infty$.

(b) La limite n'existe pas. Si on considère les deux suites $x_n = n$ et $y_n = n + 1/2$, on a deux suites qui tendent vers $+\infty$ mais $\lim_{n\to\infty} x_n - \lfloor x_n \rfloor = 0$ tandis que $\lim_{n\to\infty} y_n - \lfloor y_n \rfloor = 1/2$.

(c) Si $x_n \to +\infty$, on a $x_n > 0$ à partir d'un certain n_1, et on a alors

$$\frac{x_n - 1}{x_n} \leq \frac{\lfloor x_n \rfloor}{x_n} \leq 1.$$

Comme $(x_n - 1)/x_n \to 1$, le théorème des deux gendarmes nous permet de conclure que la limite est 1.

(d) On peut appliquer le théorème des deux gendarmes et on trouve que la limite est 0.

5. (a) les trois sont discontinues en 1

(b) Les trois sont continues: si $x_n \to 1/2$, alors il existe un n_0 tel que $|x_n - 1/2| < 1/2$ pour tout $n \geq n_0$. Donc $0 < x_n < 1$ pour $n \geq n_0$, et par suite $\lfloor x_n \rfloor = 0$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, pour $n \geq n_0$, $f(x_n) = g(x_n) = h(x_n) = 0$, et donc tendent vers 0.

(c) Les trois sont continues, par un argument semblable à (b).

(d) g est continue, f et h sont discontinues.