Analyse 1
15 avril 2016

Exercices: propriétés des fonctions continues

1. Soit $p(x) = x^3 - 7x^2 + 5$.
   (a) Pourquoi peut-on affirmer que l'intervalle $[0, 1]$ contient une racine du polynôme p?
   (b) En utilisant l'algorithme de bissection comme dans la preuve du théorème des valeurs intermédiaires, trouver un intervalle de longueur $\frac{1}{16}$ qui contient une racine de p.

2. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. Montrer que si $f(a) > g(a)$ et $f(b) < g(b)$, alors il existe un $c \in (a, b)$ tel que $f(c) = g(c)$.

3. Soit $f\colon [0, 1] \to [0, 2]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = 2c$.

4. (a) Montrer que si $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ est continue et satisfait $f(a) < 0$ et $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$, alors l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans l'intervalle (a, b).
   (b) Déduire que l'équation
   $$\frac{x^2 + 1}{2 - x} - \frac{\cos x}{x^3 + 1} = 0$$
   possède une solution dans l'intervalle $(0, 2)$. [Remarque: on pourra prendre pour acquis que la fonction cos est continue.]

5. Montrer que si $f\colon [1, 3] \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas, alors il existe un nombre $r > 0$ tel que $|f(x)| > r$ pour tout $x \in [1, 3]$.

6. Montrer que toute fonction f continue sur $[0, 1]$ qui ne prend que des valeurs rationnelles est constante.

7. Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *périodique* s'il existe un nombre T tel que $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par exemple, la fonction sin est périodique (prendre $T = 2\pi$). Montrer que toute fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée, et qu'il existe $c, d \in \mathbb{T}$ tels que
   $$f(c) \le f(x) \le f(d)$$
   pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les nombres c et d sont-ils uniques?

8. Soit f une fonction continue sur $(a, b]$. Montrer que si $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, alors f est majorée et il existe un $d \in (a, b]$ tel que $f(x) \le f(d)$ pour tout $x \in (a, b]$.