ANALYSE 1
15 avril 2016

Exercices: propriétés des fonctions continues – corrigé partiel

1. (a) C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires car p est continue et $p(0)$ et $p(1)$ sont de signes opposés.

   (b) En coupant successivement l'intervalle $[0, 1]$ comme dans l'algorithme de bissection, on trouve qu'il y a une racine dans l'intervalle $[\frac{7}{8}, \frac{15}{16}]$.

2. Il suffit d'appppliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonctin $f - g$.

3. Suggestion: considérer la fonctin $f(x) - 2x$.

4. (a) On a que $\lim_{n\to\infty} f(b-\frac{1}{n}) = \infty$. En particulier, il existe un n_0 tel que $f(b-\frac{1}{n_0}) > 0$. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires avec l'intervalle $[a, b - \frac{1}{n_0}]$.

   (b) Prendre l'expression de gauche pour $f(x)$, $a = 0$ et $b = 2$ et vérifier que les hypothèses de (a) sont satisfaites.

5. La fonction $|f(x)|$ est continue et atteint son minimum en un point $c \in [1, 3]$. Prendre $r = |f(c)|$.

6. Aide: procéder par contradiction, en utilisant le fait qu'entre deux rationnels distincts, il existe toujours un irrationnel.

7. Par le théorème des valeurs extrêmes, la fonction f atteint son minimum et son maximum sur $[0, T]$, en des points c et d respectivement. Vérifier que c et d ont la propriété voulue.

8. L'idée est que puisque $f(x)$ devient petite quand on approche de a, les points au voisinage de a n'affectent pas le fait qu'elle soit majorée, et on peut étudier f sur un intervalle fermé $[a', b]$ pour $a' > a$, auquel le théorème des valeurs extrêmes s'applique.

   Solution: Soit $x_0 \in (a, b]$ quelconque. Puisque $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) < f(x_0)$ pour $x \in (a, a + \delta)$ (voir la série d'exercices précédente). En particulier, notons que $x_0 \notin (a, a + \delta)$. Appliquons le théorème des valeurs extrêmes à l'intervalle fermé $[a + \delta, b]$. On trouve un $d \in [a + \delta, b]$ tel que $f(x) \leq f(d)$ pour tout $x \in [a + \delta, b]$. Notons que $f(x_0) \leq f(d)$ car $x_0 \in [a + \delta, b]$. Quand $x \in (a, a + \delta)$, on a $f(x) < f(x_0) \leq f(d)$, et donc on a aussi $f(x) \leq f(d)$. Ainsi, on a $f(x) \leq f(d)$ pour tous les $x \in [a, b]$.