17 février 2016

MAT-1100 Corrigé du Test 2

Pour les questions 1 à 4, encerclez la bonne réponse.

1. La valeur de $\frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}$ est

   (a) $\frac{1}{2^{14}}$ (b) $\frac{127}{3072}$ (c) $\frac{43}{1024}$ $\checkmark$ (d) $\frac{129}{1024}$

   (e) aucune de ces réponses

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{2 + 3n + 5n^2} =$

   (a) 0 (b) $\frac{1}{5}$ $\checkmark$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) n'existe pas

   (e) aucune de ces réponses

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - 1}{n} =$

   (a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 $\checkmark$ (d) n'existe pas

   (e) aucune de ces réponses

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2^n)}{n^2 + n + 1} =$

   (a) 0 $\checkmark$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) n'existe pas

   (e) aucune de ces réponses

Tournez S.V.P.

Pour les questions 5 et 6, il peut y avoir plus d'une bonne réponse. Il y a en tout 5 bonnes réponses: encerclez-les. (**N'encerclez pas plus de 5 réponses.**)

5. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$. Laquelle ou lesquelles des conclusions suivantes peut-on tirer?

   (a) Il n'y a qu'un nombre fini de n pour lesquels $x_n \leq 0$. $\surd$ prendre $\varepsilon = 1/2$ dans la définition de limite

   (b) Il n'y a qu'un nombre fini de n pour lesquels $x_n > \frac{1}{2}$. faux pour la suite définie par $x_n = 1/2 + 1/n$

   (c) À partir d'un certain rang, on a $x_n \leq 1$ $\surd$ prendre $\varepsilon = 1/2$

   (d) $x_n \neq \frac{1}{2}$ pour tout n. faux pour la suite définie $x_n = 1/2$ pour tout n

   (e) La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est monotone. faux pour la suite $x_n = 1/2 + (-1)^n/n$

   (f) La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée. $\surd$ par un théorème du cours

6. Soit $(y_n)_{n\geq 1}$ une suite qui converge vers une limite $\ell \neq 1$. Lequel ou lesquels des énoncés suivants sont vrais?

   (a) Il existe un rang N tel que $\ell - 1 < y_n < \ell + 1$ pour tout $n \geq N$. $\surd$ prendre $\varepsilon = 1$ dans la définition de limite

   (b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de n pour lesquels $|y_n - 1| < \varepsilon$. faux pour $\varepsilon = 2|\ell - 1|$ si on prend la suite constante $y_n \equiv \ell$

   (c) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que $|y_n - 1| > \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. faux pour $\varepsilon = |\ell - 1|$ si on prend la suite constante $y_n \equiv \ell$

   (d) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang N tel que $|y_n - 1| > \varepsilon$ pour tout $n \leq N$.

   (e) Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $|y_n - 1| > \varepsilon$ pour tout n. faux pour la suite $(y_n) = (1, \ell, \ell, \ell, \ell, \dots)$.

   (f) Il existe un $\varepsilon > 0$ et un N tel que $|y_n - 1| > \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. $\surd$ prendre $\varepsilon = |\ell - 1|/2$ dans la définition de limite

7. Donner un exemple de deux suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ dont les termes sont non nuls, qui sont convergentes, mais pour lesquelles la suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ est divergente. (On ne demande pas de justifier.)

   Réponse: on peut prendre par exemple $a_n = \dfrac{1}{n}$ et $b_n = \dfrac{1}{n^2}$