27 avril 2016

MAT-1100 Examen 2: Solutions

1. Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle converge en utilisant un critère approprié. Le cas échéant, indiquer si la convergence est absolue ou conditionnelle.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)!}$

   Il s'agit d'une série à termes positifs. Appliquons le critère du rapport:

   $$\frac{\frac{3^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{3^n}{(2n+1)!}} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}}{\frac{3^n}{(2n+1)!}} = \frac{3}{(2n+3)(2n+2)} \to 0$$

   Puisque $0 < 1$, le critère du rapport nous donne que la série converge (absolument, puisqu'elle est à termes positifs).

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1}$

   Cette série converge absolument car on a

   $$\left|\frac{\sin n}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2},$$

   et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2+1}\right|$ converge par comparaison avec la série convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}$

   Il s'agit d'une série alternée. On a que $\dfrac{1}{n^{2/3}}$ décroît et tend vers 0. Donc, par le critère de Leibniz, la série converge. La convergence n'est pas absolue car la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ est une série de Riemann avec $p = \frac{2}{3} < 1$, donc divergente. Ainsi la convergence est conditionnelle.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^n + 1}$

Cette série diverge car

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-\frac{1}{2})^n}{1 + (\frac{1}{2})^n} = 1 \neq 0.$$

2. Soit f une fonction qui est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et qui prend ses valeurs dans $[a, b]$. Montrer qu'il existe un $t \in [a, b]$ tel que $f(t) = t$.

   Posons $g(x) = f(x) - x$, qui est une fonction continue sur $[a, b]$ car c'est la différence de deux fonctions continues. L'exercice revient à montrer qu'il existe un $t \in [a, b]$ tel que $g(t) = 0$. Si $g(a) = 0$, on n'a qu'à prendre $t = a$, et si $g(b) = 0$, on n'a qu'à prendre $t = b$. Si $g(a) \neq 0$ et $g(b) \neq 0$, alors puisque par hypothèse $a \leq f(x) \leq b$ pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$g(a) = f(a) - a > 0 \text{ et } g(b) = f(b) - b < 0.$$

   Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut alors conclure qu'il existe un $t \in (a, b)$ tel que $g(t) = 0$.

3. (a) Supposons que $a_n \geq 0$ pour tout n et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

   Puisque la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ est à termes positifs, on peut lui appliquer le critère de comparaison. Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. En particulier, la suite (a_n) est bornée, disons $|a_n| \leq M$ pour tout n. On a donc $a_n^2 \leq Ma_n$, et puisque la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} Ma_n$ converge, le critère de comparaison donne que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

   (b) Est-il vrai que, si $a_n \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge?

   Non. Par exemple $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge mais $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

   (c) Est-ce que le résultat de (a) reste vrai si on enlève l'hypothèse que $a_n \geq 0$ pour tout n?

   Non. Par exemple, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (par le critère de Leibniz) mais $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui satisfait $f(x) > 0$ quand $|x| > 1$. En appliquant un théorème sur les fonctions continues, montrer qu'il existe une constante m telle que
$$f(x) \geq m \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

   Par le thèorème des valeurs extrêmes, f atteint son minimum sur l'intervalle $[-1,1]$, c'est-à-dire il existe $d \in [-1,1]$ tel que $f(x) \geq f(d)$ pour tout $x \in [-1,1]$. Puisque par ailleurs on a $f(x) > 0$ quand $x \notin [-1,1]$, en prenant
$$m := \min(0, f(d)),$$
   on aura $f(x) \geq m$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. (a) Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée, alors la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = xf(x)$$
   est continue en 0.

   On a $g(0) = 0$, et il faut donc montrer que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Soit donc (x_n) une suite quelconque telle que $x_n \to 0$. Puisque f est bornée, il existe un nombre réel T tel que $|f(x)| \leq T$ pour tout x. On a donc
$$|g(x_n)| = |x_n f(x_n)| \leq M|x_n|.$$
   Comme $M|x_n| \to 0$, on a par le théoerème des deux gendarmes que $g(x_n) \to 0$.

   (b) Donner un exemple d'une fonction bornée f pour laquelle g ne serait pas continue au point 1.

   On peut prendre par exemple la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(x) = 1$ si $x \geq 1$, qui est bornée. Ici on a $g(1) = 1$. Cependant, si on prend la suite $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, on a $x_n \to 1$ mais $g(x_n) = x_n f(x_n) = 0 \to 0 \neq g(1)$. Ainsi g est discontinue en 1.