6 mars 2008 Nom:

MAT-17591 Examen 1

Directives: répondez à toutes les questions en justifiant vos réponses. **Aucune documentation ni calculatrice n'est permise.**

1. (10 points) Calculer

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{4^{399}} + \frac{1}{4^{400}}$$

en exprimant la réponse sous la forme m/n avec m et n entiers.

/10

2. (40 points) En appliquant des théorèmes vus au cours, calculer la limite ou montrer que la limite n'existe pas.

   (a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n + \cos n}{n + 1}$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n}{2n - 1}$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+2)}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}\right)$

(d) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

/40

3. (25 points)

(a) Définir les termes *borne inférieure* et *borne supérieure* d'un ensemble de nombres réels E.

(b) Soient E et F deux ensemble de nombres réels tels que pour tous les $x \in E$ et $y \in F$ on a $x < y$. Montrer que $\sup E \leq \inf F$.

(b) (suite)

(c) Donner un exemple où les hypothèses de (b) sont satisfaites et où on a $\sup E < \inf F$.

(d) Donner un exemple où les hypothèses de (b) sont satisfaites et où on a $\sup E = \inf F$.

/25

4. (25 points) Supposons que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

(a) Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n$ pour tout $n \geq n_0$.

(b) Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, on a l'inégalité $a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0}$.

(c) Déduire que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(d) En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{400^n}{n!}.$$

/25