MAT-1100 Corrigé de l'examen 1

1. Soit $\varepsilon > 0$. On a
$$\left|\frac{2n-4}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{-14}{3n+1}\right| = \frac{14}{3n+1}.$$
Cette dernière quantité est $< \varepsilon$ dès que $14/(3n+1) < \varepsilon$, ce qui est vrai dès que $n > (14/\varepsilon - 1)/3$. Donc, si on choisit N tel que $N > (14/\varepsilon - 1)/3$, alors on aura
$$\left|\frac{2n-4}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

2. (a) On a
$$\frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} = \frac{(\frac{2}{3})^n - 1}{(\frac{2}{3})^n + 1}.$$
Puisque $|2/3| < 1$, un résultat du cours nous donne $(2/3)^n \to 0$. Ainsi,
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 = 1$$
(somme et différence de limites). Puisque $\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \neq 0$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \neq 0$, le théorème sur les limites de quotients nous donne
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{2}{3})^n - 1}{(\frac{2}{3})^n + 1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

   (b) On a
$$\frac{4}{4^{\frac{1}{n}}} = (4^{n-1})^{\frac{1}{n}} \leq (2^n + 4^{n-1})^{\frac{1}{n}} \leq (4^n + 4^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot 4.$$
Par un théorème vu au cours, $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 4^{\frac{1}{n}} = 1$. Donc, par le théorème sur les produits et les quotients, $\frac{4}{4^{\frac{1}{n}}} \to 4$ et $2^{\frac{1}{n}} \cdot 4 \to 4$. Par le théorème des deux gendarmes, la limite cherchée est 4.

3. (a) La borne supérieure d'un ensemble majoré E est le plus petit majorant de E, ou encore, il s'agit de l'unique nombre S qui a les propriétés
   (i) S est un majorant de E
   (ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $x \in E$ tel que $x > S - \varepsilon$.

   La borne inférieure d'un ensemble minoré E est le plus grand minorant de E, ou encore, il s'agit de l'unique nombre I qui a les propriétés
   (i) I est un minorant de E

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $x \in E$ tel que $x < I + \varepsilon$.

(b) Par exemple, si $E = [0, 1)$, on a $\inf E = 0$ et $0 \in E$, et $\sup E = 1$ mais $\sup E \notin E$. Un autre exemple est $E = \{-1/n\}$. On a $\inf E = -1 \in E$ et $\sup E = 0 \notin E$.

(c) Soit $S = \sup E$. Par la partie (ii) de la définition, avec $\varepsilon = 1/n$, il existe un élément de E, appelons-le x_n, tel que $x_n > S - \frac{1}{n}$. Par ailleurs, on a $x_n \leq S$ car S est un majorant de E. Ainsi on a

$$S - \frac{1}{n} < x_n \leq S.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} S - \frac{1}{n} = S$, le théorème des deux gendarmes donne $\lim_{n\to\infty} x_n = S$.

4. Puisque $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, on a

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

En particulier la première inégalité nous dit que la suite (a_n) est croissante. Puisque chaque intervalle est inclus dans ses prédécesseurs, on a $[a_n, b_n] \subseteq [a_1, b_1]$ pour tout n, ce qui implique $a_n \in [a_1, b_1]$, et, en particulier,

$$a_n \leq b_1$$

pour tout n. Ceci nous dit que la suite (a_n) est majorée. La suite étaant croissante et majorée, un théorème du cours nous permet de conclure qu'elle converge.

5. (a) En prenant $\varepsilon = 1/2$ dans la définition de limite, on trouve qu'il existe un rang N tel que $|x_n - 2| < 1/2$ pour tout $n \geq N$. En particulier, on a $x_n > 2 - 1/2 = 3/2$ pour $n \geq N$. On a alors pour ces n que $|x_n - 1| \geq x_n - 1 > 1/2$.

(b) En utilisant le (a), on a que

$$\left|\frac{(-1)^n}{x_n - 1}\right| = \frac{1}{|x_n - 1|} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

pour tout $n \geq N$. Posons $M = \max\{\frac{1}{|x_1-1|}, \frac{1}{|x_2-1|}, \dots, \frac{1}{|x_{N-1}-1|}, 2\}$. On a que

$$\left|\frac{(-1)^n}{x_n - 1}\right| \leq M$$

pour tout n.