6 mars 2008 Nom:

# MAT-17591 Solutions de l'examen 1

1. Calculer
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^{399}}+\frac{1}{4^{400}}$$
en exprimant la réponse sous la forme $m/n$ avec $m$ et $n$ entiers.

   Il s'agit d'une progression géométrique de raison 1/4. On a
$$\begin{aligned}\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^{399}}+\frac{1}{4^{400}} &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^{399}}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1-(\frac{1}{4})^{400})}{1-\frac{1}{4}}\right]\\ &= \frac{1-(\frac{1}{4})^{400}}{3}=\frac{4^{400}-1}{3\cdot 4^{400}}\end{aligned}$$

2. Pour chacune des questions suivantes, calculer la limite ou montrer que la limite n'existe pas.

   (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+\cos n}{n+1}$

   Puisque $-1 \leq \cos n \leq 1$ on a
$$\frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n+\cos n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+1}$$
   et, puisque $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+1}=1$, le théorème des deux gendarmes implique que la limite cherchée est 1.

   (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{2n-1}$

   si on pose $x_n=\frac{(-1)^n n}{2n-1}$, alors pour les termes de rang pair, on a
$$x_{2n}=\frac{2n}{4n-1}\to\frac{1}{2}$$
   et pour les termes de rang impair on a
$$x_{2n-1}=\frac{-(2n-1)}{4n-3}\to-\frac{1}{2}.$$
   Comme il y a deux sous-suites qui tendent vers des limites différentes, on conclut que la suite $(x_n)$ diverge.

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+2)}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)(n^2+2n)-(n+1)n^3}{(n+1)(n^2+1)}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+2n}{(n+1)(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n^2})}=\frac{1+0+0}{(1+0)(1+0)}=1.$

(d) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=$
$=e\cdot 1=e.$

3. (a) Définir les termes *borne inférieure* et *borne supérieure* d'un ensemble $E$.

La *borne supérieure* de $E$ est le nombre $S$ qui a les propriétés suivantes

i. $x\leq S$ pour tout $x\in E$ (en d'autres mots $S$ est un majorant de $E$)

ii. pour tout $S'<S$, il existe un $x_0\in E$ tel que $x_0>S'$ (en d'autres mots $S$ est le *plus petit* majorant de $E$.)

La *borne inférieure* de $E$ est le nombre $I$ qui a les propriétés suivantes

i. $x\geq I$ pour tout $x\in E$ (en d'autres mots $S$ est un minorant de $E$)

ii. pour tout $I'>I$, il existe un $x_0\in E$ tel que $x_0<I'$ (en d'autres mots $I$ est le *plus grand* minorant de $E$.)

(b) Soient $E$ et $F$ deux ensemble de nombres réels tels que pour tous les $x\in E$ et $y\in F$ on a $x<y$. Montrer que $\sup E\leq\inf F$.

Soit $y\in F$ quelconque. Alors l'hypothèse implique que $y$ est un majorant de $E$. Comme $\sup E$ est le plus petit majorant de $E$, on conclut que $\sup E\leq y$. Comme ceci est vrai pour tout $y\in F$, on a donc que $\sup E$ est un minorant de $F$. Comme $\inf F$ est le plus grand des minorants de $F$, on a donc $\sup E\leq\inf F$.

(c) Donner un exemple où on a $\sup S<\inf T$.

On peut prendre par exemple $S=\{-1\}$ et $T=\{0\}$.

(d) Donner un exemple où on a $\sup S=\inf T$.

On peut prendre par exemple $S=\{0\}$ et $T=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}$.

4. Supposons que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

(a) Montrer qu'il existe un rang $n_0$ tel que $a_{n+1} \leq \frac{1}{2} a_n$ pour tout $n \geq n_0$.

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Par la définition de limite, on peut trouver un rang $n_0$ tel que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Puisque les termes sont positifs, cette dernière inégalité est équivalente à $a_{n+1} \leq \frac{1}{2} a_n$

(b) Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, on a l'inégalité $a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0}$.

On peut procéder par induction. Le résultat est évident si $n = n_0$. Supposons que $n \geq n_0$ et $a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0}$. Alors puisque $n+1 > n_0$ et par l'hypothèse d'induction on a

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2} a_n \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0} a_{n_0},$$

ce qui complète l'induction.

(c) Déduire que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pour $n \geq n_0$ on a

$$0 < a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0}.$$

Puisque $\frac{1}{2} < 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} = 0$$

et on peut appliquer le théorème des deux gendarmes pour conclure que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(d) En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{400^n}{n!}.$$

Si on prend $a_n = \dfrac{400^n}{n!}$, on a $a_n > 0$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{400^{n+1}/(n+1)!}{400^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{400}{n+1} = 0$$

et donc l'hypothèse de cet exercice est satisfaite. Donc, par (c), on a que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{400^n}{n!} = 0.$$