24 avril 2008 Nom:

MAT-17591 Examen 2

Directives: répondez à toutes les questions en justifiant vos réponses. Vous pouvez utiliser sans les démontrer les cas de convergence des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ pour s constant, ainsi que les résultats sur les dérivées et la règle de l'Hôpital. **Aucune documentation ni calculatrice n'est permise.**

1. (40 points) En appliquant à chacune un critère approprié, déterminer si les séries suivantes convergent.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n(n+2)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3)(5)(7)\dots(2n+1)}$

/40

2. (10 points) Évaluer la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{400^n}$$

en justifiant la méthode utilisée.

/10

3. (10 points) On définit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = xf(x).$$

Montrer que f est discontinue en 0 et g est continue en 0.

/10

4. (20 points) Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est VRAI ou FAUX, en justifiant par une preuve ou un contre-exemple.

   (a) Si la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $(0, 1)$, alors il existe un nombre $a > 0$ tel que $f(x) \geq a$ pour tout $x \in (0, 1)$.

   (b) Si la fonction f est bornée sur l'intervalle $[0, 1]$, alors il existe un $c \in [0, 1]$ tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

(c) Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors le rayon de convergence R de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ satisfait $R \geq 1$.

(d) Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors la nouvelle série

$$a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 + \cdots$$

(obtenue en permutant deux à deux les termes de la série originale) converge vers la même valeur.

/20

5. (20 points) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ qui satisfait $0 \leq f(x) \leq 2$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un $c \in [0, 1]$ pour lequel on a

$$f(c) = 2c.$$

/20