24 avril 2008

MAT-17591 Corrigé de l'Examen 2

1. En appliquant à chacune un critère approprié, déterminer si les séries suivantes convergent.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$

   Il s'agit d'une série alternée. Comme $a_n := \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ décroît avec n et tend vers 0 quand $n \to \infty$, le critère de Leibniz s'applique et on conclut que la série converge.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}$

   On a
$$\left|\frac{(-1)^n n}{n+2}\right| = \frac{n}{n+2} \to 1 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$
   Ainsi le terme général de la série ne tend pas vers 0, et on peut conclure que la série diverge.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n(n+2)}$

   On a
$$\left|\frac{\cos n}{n(n+2)}\right| \leq \frac{1}{n^2+2n} \leq \frac{1}{n^2}.$$
   Or on sait que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Ainsi la série converge absolument, et donc elle converge.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3)(5)(7)\dots(2n+1)}$

   La série est à termes positifs. Utilisons le critère du rapport. On a
$$\frac{(n+1)!/((3)(5)(7)\dots(2n+1)(2n+3)}{n!/(3)(5)(7)\dots(2n+1)} = \frac{n+1}{2n+3} \to \frac{1}{2} < 1$$
   et donc la série converge.

2. Évaluer la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{400^n}$$

en justifiant la méthode utilisée.

Considérons la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

dont le rayon de convergence est 1. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

et, par un théorème vu au cours, on a le droit de dériver cette identité sur l'intervalle $(-1, 1)$, ce qui donne l'identité

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{pour } x \in (-1, 1).$$

En utilisant cette formule avec $x = 1/400$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{400^n} = \frac{1}{400} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{400}\right)^{n-1} = \frac{1}{400} \frac{1}{(399/400)^2} = \frac{400}{399^2}$$

3. On définit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = xf(x).$$

Montrer que f est discontinue en 0 et g est continue en 0.

Considérons la suite $x_n = 1/((2n+1)\pi)$. On a $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ mais

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos((2n+1)\pi) = \lim_{n\to\infty} -1 = -1 \neq f(0).$$

Il suit que f est discontinue en 0. Pour la deuxième question, notons d'abord que $g(0) = 0$. Maintenant, soit (x_n) une suite quelconque avec $x_n \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. On a alors

$$|g(x_n)| = |x_n \cos(\frac{1}{x})| \leq |x_n|.$$

Comme $|x_n| \to 0$, le théorème des deux gendarmes implique $g(x_n) \to 0 = g(0)$. Il suit que g est continue en 0.

4. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est VRAI ou FAUX, en justifiant par une preuve ou un contre-exemple.

   (a) Si une fonction f est continue et positive sur l'intervalle $(0, 1)$, alors il existe un nombre $a > 0$ tel que $f(x) \geq a$ pour tout $x \in (0, 1)$.

   L'énoncé est FAUX. La fonction $f(x) = x$ est un contre-exemple.

   (b) Si la fonction f est bornée sur l'intervalle $[0, 1]$, alors il existe un $c \in [0, 1]$ tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

   L'énoncé est FAUX. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

   est un contre-exemple.

   (c) Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors le rayon de convergence R de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ satisfait $R \geq 1$.

   Le résultat est VRAI. On sait que la série entière diverge pour tout x satisfaisant $x > R$. Si R était inférieur à 1, elle divergerait en $x = 1$, contredisant l'hypothèse.

   (d) Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors la nouvelle série

$$a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 + \cdots$$

   (obtenue en permutant deux à deux les termes de la série originale) converge vers la même valeur.

   Le résultat est VRAI. Dénotons par s_m les sommes partielles de la série originale et par t_m les sommes partielles de la série réarrangée. Par hypothèse, les s_m tendent vers une limite S quand $m \to \infty$. Pour les sommes partielles de la deuxième série, on a quand $k \to \infty$

$$t_{2k} = s_{2k} \to S$$

   et

$$t_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+2} \to S$$

   car $a_{2k+2} \to 0$ étant donné que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente. Puisque la sous-suite des termes de rang pair et la sous-suite des termes de rang impair tendent vers la même limite S, on a que $\lim t_m = S$.

5. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$ qui satisfait $0 \leq f(x) \leq 2$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe un $c \in [0,1]$ pour lequel on a

$$f(c) = 2c.$$

Considérons la fonction g définie par $g(x) = f(x) - 2x$. Comme elle est la différence de deux fonctions continues, la fonction g est continue. Le problème revient à montrer qu'il existe un $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$. On a

$$g(0) = f(0) \geq 0$$

et

$$g(1) = f(1) - 2 \leq 0.$$

On a trois possibilités. Si $g(0) = 0$, il suffit de prendre $c = 0$; si $g(1) = 0$, il suffit de prendre $c = 1$. Si on n'est pas dans l'une des deux situations précédentes, on a $g(0) > 0$ et $g(1) < 0$. Dans ce cas, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe un $c \in (0,1)$ tel que $g(c) = 0$: encore une fois on a la conclusion recherchée.