Solution no 145

DES POLYNÔMES PRODUITS DE BINÔMES. Puisque $P_n(x)$ est la multiplication des termes de la forme $(1+x^{z(n)})$ où $z(n)$ représente les puissances de 2 jusqu'à 2^{n-1}, on peut exprimer le développement de $P_n(x)$ comme étant $P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2^n-1}$. Multipliant ensuite ce développement de $P_n(x)$ par $(1-x)$, on obtient alors, par technique de télescopage,

$$(1-x)P_n(x) = 1 - x^{2^n}, \qquad (*)$$

d'où

$$P_n(x) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}.$$

On obtient ainsi

$$P_{333}(x) = \frac{1-x^{2^{333}}}{1-x}.$$

REMARQUE : On aurait également pu trouver l'expression $(*)$ en multipliant $(1-x)$ par $P_n(x)$ sous la forme $P_n(x) = (1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^{n-1}})$, en remarquant alors que $(1-x)(1+x) = 1-x^2, (1-x^2)(1+x^2) = 1-x^4$, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de $(1-x^{2^{n-1}})(1+x^{2^{n-1}}) = 1-x^{2^n}$.

Tuyau no 152

DES SOMMES AVEC DES FACTORIELLES.

(i) Exprimer $\dfrac{k}{(k+1)!}$ comme une différence de deux fractions.

(ii) Exprimer $k \cdot k!$ comme une différence de deux factorielles.

Solution no 152 DES SOMMES AVEC DES FACTORIELLES.

(i) En écrivant judicieusement la fraction $\frac{k}{(k+1)!}$ sous la forme suivante :

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!},$$

on obtient

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

(ii) Comme $k \cdot k! = (k+1-1) \cdot k! = (k+1) \cdot k! - 1 \cdot k! = (k+1)! - k!$, on a

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots n \cdot n! = (2! - 1!) + (3! - 2!) + \ldots + ((n+1)! - n!) = (n+1)! - 1.$$