1.6 Les inégalités classiques

1. Les inégalités triangulaires.
   Si x et y sont des nombres réels arbitraires, alors
   (a) $|x+y| \leq |x| + |y|$,
   (b) $|x-y| \geq |x| - |y|$,
   (c) $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

2. Moyenne arithmétique et moyenne géométrique.
   La moyenne arithmétique de nombres réels positifs est au moins aussi grande que leur moyenne géométrique. En termes plus formels, cela veut dire que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels positifs, alors

   $$(*) \qquad (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

   De plus, on a égalité si et seulement si tous les a_i sont égaux.

   Exemple:
   Un cas particulier très simple de cette inégalité est obtenu en posant $a_1 = x^2$ et $a_2 = y^2$. On a alors

   $$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2},$$

   i.e.

   $$2xy \leq x^2 + y^2,$$

   Une belle application de $(*)$ est l'inégalité

   $$(**) \qquad r(1-r) \leq \frac{1}{4} \qquad \text{si } 0 \leq r \leq 1.$$

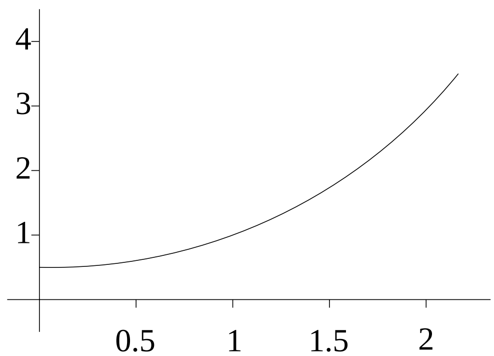
   En effet, en posant $a_1 = r$ et $a_2 = 1 - r$, auquel cas on a

   $$\frac{r + (1-r)}{2} \geq \sqrt{r(1-r)}, \quad \text{i.e. } \frac{1}{2} \geq \sqrt{r(1-r)}, \quad \text{ce qui prouve } (**).$$

3. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
   Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des nombres réels quelconques, alors

   $$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

4. Une interprétation géométrique.
   Un fait géométrique presque banal permet de démontrer une foule d'inégalités. Il s'agit du fait que si une fonction est positive en un point et croissante à partir de ce point, alors elle est également positive à partir de ce point. En termes plus formels, *si f est une fonction dérivable telle que $f(x_0) > 0$ et telle que $f'(x) > 0$ pour $x \geq x_0$, alors $f(x) > 0$ pour tout $x \geq x_0$.* Voilà donc un résultat qui est presque évident selon le graphique suivant (avec $x = x_0 = 0$) :



   Ce petit résultat signifie également que si f et g sont deux fonctions dérivables telles que $f(x_0) > g(x_0)$ et si de plus $f'(x_0) > g'(x_0)$ pour chaque $x \geq x_0$, alors $f(x) > g(x)$ pour tout $x \geq x_0$.