**Automne 2014**

**MAT-2410 : optimisation**
**solutionnaire – série 1**

1. (a) Oui car
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1$$
qui est coercive car la matrice est définie positive, i.e. $a_{11} = 2 > 0$ et $\det A = 1 > 0$.

   (b) Non. On peut prendre $(x_n, y_n) = (0, -n) \Longrightarrow \|(x_n, y_n)\| \to \infty$ mais $f(x_n, y_n) \to -\infty$.

   (c) Non, car $f(x,y) = (x+y)^2$. On peut prendre $(x_n, y_n) = (n, -n) \Longrightarrow \|(x_n, y_n)\| \to \infty$ mais $f(x_n, y_n) = 0$.

   (d) Non. On peut prendre $(x_n, y_n) = (n, n) \Longrightarrow \|(x_n, y_n)\| \to \infty$ mais $f(x_n, y_n) = 0$.

   (e) Oui, car $f(x,y) = x^2 + y^2 + \sin x \sin y \geq x^2 + y^2 - 1$ qui est coercive.

   (f) Oui, car $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2} \geq x^2 + y^2$ qui est coercive.

2. La fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \sin x$ est coercive car $f(x) \geq \dfrac{x^2}{2} - 1$. Donc le problème
$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$
admet un minimum. La condition d'optimalité est $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x - \cos x = 0$.

3. On pose $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \sin x \sin y$ qui est coercive selon le no. 1 (e). Ainsi le problème
$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$$
admet un minimum. La condition d'optimalité (plan tangent horizontal) s'écrit
$$\begin{aligned} f_x = 0 &\Longleftrightarrow x - \cos x \sin y = 0, \\ f_y = 0 &\Longleftrightarrow y - \sin x \cos y = 0. \end{aligned}$$

4. Il suffit de montrer que
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \leq 1\}$$
est borné.

   On a que
$$100(y - x^2)^2 + (1-x)^2 \leq 1 \Longrightarrow |1 - x| \leq 1 \quad \text{et} \quad |y - x^2| \leq 1/10$$

La première inégalité donne $0 \leq x \leq 2$ et la deuxième fournit les estimations

$$|y - x^2| \leq 1/10 \Longrightarrow -1/10 + x^2 \leq y \leq x^2 + 1/10 \Longrightarrow -1/10 \leq y \leq 4.1$$

qui montre que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \leq 1\}$ est borné.

Le point minimal est $(1, 1)$ car

$$f(x, y) \geq f(1, 1) = 0, \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Soit $A$ une matrice rectangulaire de format $m \times n$ avec $m > n$ et de rang maximal, i.e. $rg(A) = n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

   (a) Développons le terme

   $$\|Ax - b\|^2 = (Ax - b, Ax - b) = (Ax, Ax) - 2(b, Ax) + (b, b) = (A^t\, Ax, x) - 2(A^t\, b, x) + (b, b).$$

   Ainsi la fonction $2f(x)$ est de la forme $(Cx, x) + (d, x) + e$ avec $C = A^t\, A$. Il est facile de vérifier la symétrie de $C$. De plus, on a

   $$(Cx, x) = (A^t\, Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0.$$

   De plus

   $$(Cx, x) = 0 \Longrightarrow Ax = 0 \Longrightarrow x \in \text{Ker } A.$$

   Mais le théorème du rang stipule que $\dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Im } A) = n$. Mais $\dim(\text{Im } A) = rg(A) = n$. Par conséquent, $\dim(\text{Ker } A) = 0$ et $x \in \text{Ker } A \Longleftrightarrow x = 0$ ce qui montre la coercivité de $f$.

   (b) On applique le théorème d'existence avec $f$ coercive.

6. Etant donné un ensemble de points $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ du plan, on considère le problème de la régression linéaire

   $$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (a\, x_i + b - y_i)^2.$$

   (a) On choisit la matrice et le vecteur

   $$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

   Visiblement, le rang de $A$ est égal à 2 si les points ne sont pas tous les mêmes, i.e. $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$.

(b) On applique le résultat du no. 5.

7. Considérons le système linéaire

$$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de solution $x = (-1, 1)$.

(a)

(b) On a que $f$ est coercive car $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie-positive.
De plus $U = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \geq 0\}$ est fermé. On applique le théorème d'existence avec $f$ coercive.

(c) On a

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x_1, x_2) \geq f(-1, 1) \Longrightarrow f(x_1, x_2) \geq f(-1, 1) \qquad \forall (x_1, x_2) \in K.$$

(d) Selon (a), il n'y a qu'un seul point où le plan tangent est horizontal. Il s'agit du point $(-1, 1)$. Soit $\bar{x} \in K$ l'unique solution du problème de minimisation

$$f(\bar{x}) = \min_{x \in K} f(x)$$

Supposons que $\bar{x}$ se trouve à l'intérieur de $K$. Le plan tangent au point $\bar{x}$ devrait être horizontal. Mais ce point est unique, donc $\bar{x} = (-1, 1) \in K$. Ce qui contredit le fait que $(-1, 1) \notin K$.

8. On notera par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ la norme $l_1$ d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

(a) On considère la fonction $g(x) = \dfrac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$ définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Cette fonction vérifie la propriété $g(\lambda\, x) = g(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Par conséquent, il suffit de la restreindre sur l'hypersphère unité $U = \{x \mid \|x\|_2 = 1\}$ qui est fermé et borné. Ainsi le problème

$$\min_{x \in U} g(x) = g(\bar{x})$$

admet un minimum. Posons $\alpha = g(\bar{x}) > 0$. On obtient la relation

$$\|x\|_1 \geq \alpha \|x\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

qui montre la coercivité de $f(x) = \|x\|_1$.

(b) Selon (a), on a que $\|Ax - b\|_1 \geq \alpha \, \|Ax - b\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Sachant que $\|Ax - b\|_2$ est coercive, on en déduit que $f(x) = \|Ax - b\|_1$ est coercive.

(c) On a

$$f(a, b) = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{m} |a\, x_i + b - y_i| = \|Ax - b\|_1$$

pour la matrice $A$ et le vecteur $b$ du no. 6 (a). On utilise (a) pour déduire l'existence d'un minimum.