Automne 2014

MAT-2410 : optimisation
solutionnaire – série 2

1. Il suffit de faire une preuve par induction sur p. Le résultat trivialement vrai pour $p = 2$. Supposons le vrai pour $p - 1$. On a que

$$\begin{aligned}
f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i) &= f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)\sum_{i=2}^{p} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_1)} x_i) \\
&\leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(\sum_{i=2}^{p} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_1)} x_i) \quad \text{car } f \text{ convexe} \\
&\leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1)\sum_{i=2}^{p} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_1)} f(x_i) \quad \text{car } \sum_{i=2}^{p} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_1)} = 1 \\
&\leq \lambda_1 f(x_1) + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)
\end{aligned}$$

2. Par la convexité de e^x, on a

$$e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y} \leq \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^y$$

On pose $x = p \ln a$, $y = q \ln b$ et $\lambda_1 = 1/p$, $\lambda_2 = 1/q$. Avec ce choix, on obtient

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y} &\leq \frac{1}{p} e^{p \ln a} + \frac{1}{q} e^{p \ln b} \\
e^{\ln a + \ln b} &\leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \\
ab &\leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q
\end{aligned}$$

3. (a) $\nabla f = (2x + 4, 2y - 1)$ et $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\nabla f = (2 + 2xy - 4y, x^2 - 4x + 3)$ et $H = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 4 \\ 2x - 4 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\nabla f = (2x + 2xy, x^2 + 2y)$ et $H = \begin{pmatrix} 2 + 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\nabla f = e^{x+y+z}(1,1,1)$ et $H = e^{x+y+z}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Calcul du gradient: on pose $x(t) = x + tv$

$$\frac{d}{dt} f(x(t))_{|t=0} = \frac{2(Ax,v)}{(Ax,x)} = (\frac{2Ax}{(Ax,x)}, v) \Longrightarrow \nabla f = \frac{2Ax}{(Ax,x)}$$

Calcul du hessien: on pose $x(s,t) = x + su + tv$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(x(s,t))_{|s=t=0} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{2}{(Ax,x)}\ (Ax,v)\right) \\ &= \frac{2}{(Ax,x)}\ (A\frac{\partial}{\partial s}x, v) + \left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{2}{(Ax,x)}\right)\ (Ax,v) \\ &= \frac{2}{(Ax,x)}\ (Au,v) - \frac{4(Ax,u)}{(Ax,x)^2}\ (Ax,v) = (Hu,v) \qquad \forall u,v \end{aligned}$$

Or $(Ax,u)(Ax,v) = (u^t Ax)(x^t A^t v) \Longrightarrow (Ax,u)(Ax,v) = u^t Axx^t Av$. Autrement dit, la matrice associée à la forme bilinéaire $(Ax,u)(Ax,v)$ est Axx^tA. Par conséquent la matrice hessienne est fournie par

$$H(x) = \frac{2}{(Ax,x)}\ A - \frac{4}{(Ax,x)^2}\ Axx^tA.$$

5. On a que

$$f'' = -\sin x + 2 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par la critère de convexité d'ordre 2, on déduit la convexité de f.

6. Sans perte de généralit; on pose $C = 1$. La matrice hessienne de $-f$ est

$$H(-f) = \begin{pmatrix} ab\, x^{a-2}y^b & -ab\, x^{-b}y^{-a} \\ -ab\, x^{-b}y^{-a} & ab\, x^a y^{b-2} \end{pmatrix}$$

On a que $h_{11} > 0$ et $\det H(-f) = 0$, ce qui implique que $H(-f) \geq 0$. Donc $-f$ est convexe, c'est-à-dire f est concave.

7. (a) Pour x fixé, la fonction $xy - f(x)$ est convexe car elle est affine. Or le sup d'une collection de fonctions convexes est aussi convexe. Donc la fonction $f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (xy - f(x))$ est convexe.

(b) $f^*(0) = \sup_{x\in\mathbb{R}} -f(x) = -\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$

(c) On doit calculer $f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(xy - x^2/2\right)$. La condition d'optimalité du sup est

$$\left(xy - x^2/2\right)' = 0 \Longrightarrow y = x.$$

Donc

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(xy - x^2/2\right) = y^2 - y^2/2 = y^2/2$$

(d) On doit calculer $f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (xy - e^x)$. La condition d'optimalité du sup est

$$(xy - e^x)' = 0 \Longrightarrow y = e^x > 0.$$

Pour $y > 0$, on obtient

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (xy - e^x) = y \ln y - y.$$

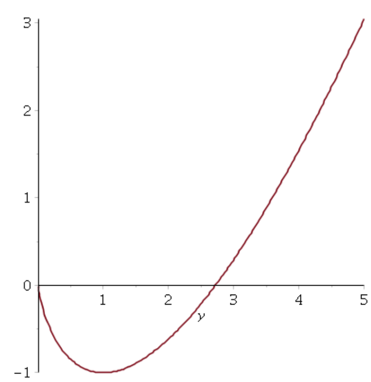
Pour $y = 0$, on obtient

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} -e^x = 0.$$

Pour $y < 0$, on obtient

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (xy - e^x) = \infty.$$

Voici le graphe de f^* pour $y > 0$. On notera sa convexité.



8. (a) La matrice hessienne est

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Un simple calcul montre que $\det M_1 = 4 > 0, \det M_2 = 20 > 0$ et $\det M_3 = \det H = 104 > 0$. Donc $H > 0$ et par la critère de convexité d'ordre, on obtient que f est strictement convexe.

(b) $f = g + h$ où g est strictement convexe (voir (a)) et h est convexe (voir 3(d)). Donc f est strictement convexe.

(c) La matrice hessienne est

$$\begin{pmatrix} 2x^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 2y^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 2z^{-3} \end{pmatrix}$$

qui est définie-positive pour $\{x, y, z > 0\}$.

(d) La matrice hessienne de f est

$$\begin{pmatrix} x^2+2 & -1 & 0 \\ -1 & y^2+2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifions que cette matrice est définie-positive.
$\det M_1 = x^2 + 2 > 0$,

$$\det M_2 = (x^2+2)(y^2+2) - 1 = x^2y^2 + 2y^2 + 2x^2 + 3 > 0 \Longrightarrow \det M_3 = 2 \det M_2 > 0$$

Donc f est strictement convexe.

9. Montrons que f est coercive. On a que $f = g + h$ avec $g = x^2 + y^2 + z^2 - xy$ et $h = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{y^4}{12} \geq 0$. Or la matrice hessienne de g est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$

qui est définie-positive, donc f est coercive. De plus, f est strictement convexe grâce à 8(d).

Selon le théorème d'existence et d'unicité, le problème

$$\min_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} f(x, y, z)$$

admet une solution unique.