Automne 2014

MAT-2410 : optimisation
solutionnaire – série 3

1. $f(x) = \frac{1}{2}\|x-z\|^2$ est strictement convexe. On a $\nabla f(x) = x - z$. Le minimum est entièrement caractérisé par la condition d'optimalité

$$(\nabla f(a), x-a) \geq 0 \quad \forall x \in U \Longleftrightarrow (a-z, x-a) \geq 0 \quad \forall x \in U.$$

En posant $a = P_U(z)$, on obtient le résultat $(z - P_U(z), x - P_U(z)) \leq 0 \quad \forall x \in U.$

L'interprétation géométrique est que l'angle θ entre les vecteurs $z - P_U(z)$ et $x - P_U(z)$ doit vérifier $|\theta| \geq \pi/2$.

2. $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$ est un cône convexe. La condition d'optimalité est

$$\begin{cases} (\nabla f(a), x) = (a-z, x) = (P_U(z) - z, x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \\ (\nabla f(a), a) = (a-z, a) = (P_U(z) - z, P_U(z)) = 0 \end{cases}$$

Il suffit de vérifier que $a = P_U(z) = \max\{0, z\}$ satisfait au deux conditions ci-dessus.

$$P_U(z) = \max\{0, z\} \geq z \Longrightarrow P_U(z) - z \geq 0 \quad \Longrightarrow (P_U(z) - z, x) \geq 0 \text{ car } x \geq 0.$$

et clairement $(\max\{0, z_i\} - z_i) \max\{0, z_i\} = 0$ pour tout i.

3. (a) $U^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; |y \geq 0\}$
   (b) $U^* = \{\lambda_1(1,5)^t + \lambda_2(-2,-3)^t \mid \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$
   (c) $U^* = \{\lambda(2,1)^t \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   (d) $U^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; |y \geq x\}$
   (e) $U^* = \{(x,y) \geq 0\}$

4. (a) Soit $x - x_0, y - x_0 \in U_{x_0} = U - x_0$. On a

$$\lambda(x-x_0) + (1-\lambda)(y-x_0) = \lambda x + (1-\lambda)y - \lambda x_0 - (1-\lambda)x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y - x_0 \in U_{x_0}$$

   car U est convexe.

   (b) Evident.

(c) Soit $y \in U^*_{x_0}$. Par la géométrie du problème, on doit avoir y qui soit parallèle au vecteur normal intérieur au point x_0. Donc $U^*_{x_0} = \{\lambda x_0 \,|\, \lambda \leq 0\}$.

5. (a) La condition d'optimalité est

$$(\nabla f(\bar{x}), x - \bar{x}) = (a, x - \bar{x}) \geq 0, \quad \forall x \in U,$$

autrement dit $a \in U^*_{\bar{x}}$.

(b) La solution n'est pas à l'intérieur car $\nabla f = a \neq 0$. Sur la frontière, on a $a \in U^*_{\bar{x}}$, autrement dit

$$a = -\lambda \bar{x} \qquad \text{pour } \lambda \geq 0 \Longrightarrow \|a\| = \lambda$$

donc $\bar{x} = -\dfrac{a}{\|a\|}$.

6. On a que $\nabla f(x) = (x_1 - 1 + x_2/2, x_2 + 2 + x_1/2)$.

(a) En $(0,0)$

$$\nabla f(0,0) = (-1, 2)$$

qui ne vérifie pas la condition d'optimalité car angle trop grand.

(b) Sur $x_1 = 0$, on doit avoir $\nabla f(x) = t(1,0)$ avec $t \geq 0$.

$$x_2 + 2 = 0 \Longrightarrow x_2 = -2$$

ce qui est impossible!

(c) Sur $x_2 = 0$, on doit avoir $\nabla f(x) = t(0,1)$ avec $t \geq 0$.

$$x_1 - 1 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1$$

$$2 + x_1/2 = t \Longrightarrow t = 5/2.$$

La solution est $(1,0)$

7. Le problème est strictement convexe. La solution doit être unique. On a que $\nabla f(x) = (x_1 - 1, x_2 - 2)$.

(a) Cherchons une solution sur la droite $x_1 + x_2 = 1$, on doit avoir $\nabla f(x) = t(-1,-1)$ avec $t \geq 0$. Ceci fournit $x_1 = 1 - t$ et $x_2 = 2 - t$

$$x_1 + x_2 = 1 \Longrightarrow 3 - 2t = 1 \Longrightarrow t = 1$$

donc $(0,1)$ qui est à l'extrémité.

(b) En $(0,1)$, on a $\nabla f(x) = (-1,-1)$ qui vérifie la condition d'optimalité.

En conclusion, $(0,1)$ est le point minimal.

8. Selon l'interprétation géométrique du problème, la solution devrait être $(1,1)$. Vérifions la condition d'optimalité en ce point. On a $\nabla f(x) = (0,-1)$ qui vérifie la condition d'optimalité (direction admissible).

9. La solution ne se trouve pas à l'intérieur du domaine des contraintes U car $\nabla(-f)(x) = (-1,-1) \neq (0,0)$. Passons en revue les segments de la frontière:

   i) En $x_2 = 0$. On doit avoir $\nabla f(a) = t\,\vec{n}_{int} \Longrightarrow (-1,-1) = (0,t)$ qui est impossible.

   ii) En $x_1 = 0$. On doit avoir $\nabla f(a) = t\,\vec{n}_{int} \Longrightarrow (-1,-1) = (t,0)$ qui est impossible.

   iii) En $2x_1 + x_2 = 2$. On doit avoir $\nabla f(a) = t\,\vec{n}_{int} \Longrightarrow (-1,-1) = (-2t,-t)$ avec $t \geq 0$ qui est impossible.

   iv) En $x_1 + 3x_2 = 3$. On doit avoir $\nabla f(a) = t\,\vec{n}_{int} \Longrightarrow (-1,-1) = (-t,-2t)$ avec $t \geq 0$ qui est impossible.

   v) Au point $(1,0)$. $\nabla f = (-1,-1)$ n'est pas une direction admissible en ce point.

   vi) Au point $(0,0)$. $\nabla f = (-1,-1)$ n'est pas une direction admissible en ce point.

   vii) Au point $(0,1)$. $\nabla f = (-1,-1)$ n'est pas une direction admissible en ce point.

   viii) Au point $(3/5,4/5)$. $\nabla f = (-1,-1)$ est une direction admissible car

   $$(-1,-1)\cdot(1,-2) = 1 > 0, \qquad (-1,-1)\cdot(-3,1) = 2 > 0.$$

   En conclusion, $(3/5,4/5)$ est le point minimal.

10. Le problème est strictement convexe. La solution doit être unique. On a que $\nabla f(x) = (x_1 - 5, x_2 - 3)$. La solution ne se trouve pas à l'intérieur du domaine des contraintes U car $\nabla f(x) = 0 \Longrightarrow (x_1,x_2) = (5,3) \notin U$. Passons en revue les segments de la frontière:

    i) Sur la droite $x_1 + x_2 = -2$. On doit avoir

    $$\nabla f(a) = t\,\vec{n}_{int} \Longrightarrow (x_1 - 5, x_2 - 3) = t(-1,-1) \text{ avec } t \geq 0 \Longrightarrow (x_1,x_2) = (5-t, 3-t)$$

    on obtient $t = 5$ ce qui implique que $x_1 = 0 > -1$ donc impossible.

ii) Sur la droite $x_1 = -1$. On doit avoir

$$\nabla f(a) = t\,\vec{n}_{int} \Longrightarrow (x_1 - 5, x_2 - 3) = t(-1, 0) \text{ avec } t \geq 0 \Longrightarrow x_2 = 3$$

ce qui est impossible.

iii) Sur la droite $x_2 = 0$. On doit avoir

$$\nabla f(a) = t\,\vec{n}_{int} \Longrightarrow (x_1 - 5, x_2 - 3) = t(0, -1) \text{ avec } t \geq 0 \Longrightarrow x_1 = 5$$

ce qui est impossible.

iv) Au point $(-2, 0)$. On a $\nabla f = (-7, 5)$. Or ce n'est pas une direction admissible car $(-7, -3)\cdot(1, -1) = -4 < 0$ où $(1, -1)$ est la direction le long de la droite $x_1 + x_2 = -2$ issue du point $(-2, 0)$.

v) Au point $(-1, -1)$. On a $\nabla f = (-6, -4)$ qui est visiblement une direction admissible.

En conclusion, $(-1, -1)$ est le point minimal.