Automne 2014

Mat-2410 : optimisation
Devoir 1

Notes

- A remettre vendredi le 10 octobre avant 16h00.
- Le devoir doit obligatoirement être réalisé à l'aide du logiciel Matlab.
- On remettra une copie papier du travail comportant les fichiers de Matlab ainsi que les réponse aux questions. De plus, on enverra par courriel une copie électronique des fichiers Matlab et Maple (M-file, script, etc.) de sorte que le professeur soit capable d'exécuter les programmes Matlab et Maple.

1. On considère la fonction

$$f(x,y) = -3x^4 + 4x^2 + \frac{x^6}{3} + xy - 4y^2 + 4y^4$$

   (a) Tracer la fonction et les courbes de niveaux de f dans le domaine $[-2.5, 2.5] \times [-1, 1]$. La fonction est-elle coercive?

   (b) Calculer le vecteur gradient ∇f et la matrice hessienne de f.

   (c) En utilisant l'information fournie par les courbes de niveaux, calculer tous les minima locaux à l'aide de la commande fminunc de Matlab.

   (d) Refaire (c) pour chercher tous les maxima locaux.
   Suggestion: $\max f(x,y) = -\min -f(x,y)$

   (e) Utiliser la commande *fsolve* de Matlab pour déterminer les autres points critiques $\nabla f(x,y) = (0,0)$. La syntaxe est:

```
[x,fval,exitflag,output] = fsolve(@fonction,x0);
```

   - @*fonction* est la fonction à valeur vectorielle ($\vec{F} = \nabla f$),
   - x_0 est le point de départ de l'algorithme, à choisir selon le graphique des courbes de niveaux.

2. Pour une matrice rectangulaire A de format $m \times n$ avec $m > n$ et de rang maximal, i.e. $rg(A) = n$ et $b \in \mathbb{R}^m$, on considère le problème de moindres carrés

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2.$$

On pose $f(x) = \dfrac{1}{2} \|Ax - b\|^2$. Nous savons que f est coercive.

(a) Calculer le vecteur gradient ∇f.

(b) Calculer la matrice hessienne de f.

(c) Montrer que f est strictement convexe. En déduire que le problème $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ admet une solution unique.

(d) Utiliser la condition d'optimalité pour caractériser la solution. Formuler une façon d'obtenir la solution à partir des données A et b.

(e) Il s'agit de calculer la courbe

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 \sin(10x) + a_4 \cos(10x) \tag{1}$$

qui représente au mieux les données $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ ci-dessous. Autrement dit, il faut résoudre le problème de moindres carrés

$$\min_{a \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (a_1 + a_2 x_i + a_3 \sin(10x_i) + a_4 \cos(10x_i) - y_i)^2. \tag{2}$$

(i) Ecrire la fonction objective sous la forme matricielle

$$f(x) = \frac{1}{2} \|A\,x - b\|^2$$

où $x = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Identifier la matrice A et le vecteur $b \in \mathbb{R}^m$.

ii) Avec les données fournies par les instructions Matlab suivantes

```
m =100;
xx = linspace(0,2,m)';
a = [ 1,0.5, 0.1, 0.1]';
yy = a(1) + a(2).*xx + a(3).*sin(10*xx) + a(3).*cos(10*xx) + .1*randn(m,1);
% modification de yy
yy(1:10:100) =  .3*[ 2,  3, -5 , 6 , 3, 8 ,4 , -2, 9 , -2];
```

résoudre le problème (2) avec fminunc de Matlab en prenant le vecteur nul comme point initial.

iii) Refaire avec l'approche trouvée en (d). Comparer et tracer sur un même graphique la courbe (1) et les données $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$.

3. Au lieu de prendre la norme euclidienne et avec les mêmes notations du numéro 2, on considère le problème de moindres carrés en norme l_1

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \Longleftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_1$$

Nous savons que f est coercive.

(a) Montrer que f est convexe. Est-elle strictement convexe? Sinon, fournir un contre-exemple.

(b) Reprendre les données du numéro 2 (e) et résoudre à l'aide de la commande fminsearch de Matlab en prenant le vecteur nul comme point initial.

(c) Comparer les solutions de régression avec la norme euclidienne et celle en norme l_1. Laquelle est plus précise par rapport aux données? Tracer sur un même graphique la courbe (1) et les données $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$.

4. On considère le problème de minimisation avec contrainte

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 3y + 1$$

De plus, on pose

$$f_r(x, y) = x^2 + xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 3y + 1 + r(x^2 + y^2 - 1)^2 \tag{3}$$

où $r \in \mathbb{R}$ est un paramètre à fixer.

(a) En tracant les courbes de niveaux de la fonction f et la courbe $x^2 + y^2 = 1$, localiser le point minimisant.

(b) En posant $r = 1$, résoudre le problème sans contrainte

$$\min_{(x,y)} f_r(x, y)$$

avec fminunc de Matlab en prenant le vecteur nul comme point initial.

(c) Résoudre plusieurs fois le problème (3) avec fminunc tout en augmentant la valeur de $r = 10, 100, 1000, \ldots$ Bien choisir le point initial. Qu'observez-vous? Quel est le lien entre cette solution et la réponse de (a)?