DEVOIR 3

MAT-2410: Optimisation — Automne 2014

A remettre vendredi le 28 novembre avant 16h00.

Notes

- Le devoir doit obligatoirement être réalisé à l'aide du logiciel Matlab.
- On remettra une copie papier du travail comportant les réponse aux questions. De plus, on enverra par courriel une copie électronique des fichiers Matlab (M-file, script, etc.) de sorte que le professeur soit capable d'exécuter les programmes Matlab.

Question 1.

L'objectif de cette question est de résoudre le problème connue sous le nom du problème de l'obstacle. Il s'agit de trouver la courbe d'équation $x(t)$ vérifiant la contrainte (obstacle) $x(t) \geq g(t)$ et qui est solution du problème de minimisation

$$\min_{\substack{x(t) \geq g(t) \\ x(0)=0 \\ x(1)=0}} \int_0^1 \frac{1}{2}\,(x'(t))^2 - a\,x(t)\,dt$$

Au lieu de résoudre ce problème continu, nous allons plutôt résoudre la version discrète obtenue par discrétisation par différence finie. Pour cela, on fixe une valeur de n et l'on décompose l'intervalle $[0,1]$ en $n+1$ sous-intervalles $[t_{i-1}, t_i]$ où $h = 1/(n+1)$ et $t_i = i\,h$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$. Il s'agit de calculer les valeurs x_i de la courbe aux points t_i. On fixe les extrémités à $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$. Ce problème s'interprète comme le calcul de la déformation d'un mince fil fixé aux deux extrémités et soumis à une force gravitationnelle a constante. De plus la courbe recherchée ne doit pas être inférieure à l'obstacle décrite par $g(t)$.

Le problème discret s'énonce comme suit: pour n fixé

$$\min_{\left\{\begin{array}{l} x_1 \geq g_1 \\ x_2 \geq g_2 \\ \vdots \\ x_n \geq g_n \end{array}\right.} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

où $g_i = g(t_i)$ et

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - x_{i-1})^2 - a\,h \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

a) Montrer que la fonction f s'écrit sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2}\,(Ax, x) - (b, x).$$

Identifier la matrice A et le vecteur $b \in \mathbb{R}^n$.

b) Montrer que A est une matrice symétrique et définie positive pour tout choix de $n \geq 2$.

c) Montrer que le problème discret admet une solution unique.

d) Résoudre ce problème à l'aide de fmincon avec l'information du gradient de f pour les données suivantes: $h = 0.01, n = 99$, $a = -5$ et

$$g(t) = 2e^{-10(t-1/2)^2} - 1.$$

Représenter graphiquement, sur la même figure, la solution ainsi que l'obstacle. Déterminer l'intervalle de t où la courbe $x(t)$ épouse la forme de l'obstacle, i.e. $x(t) = g(t)$. Commenter la convergence.

Question 2.

On considère un ensemble de points $\{x_i\}_{i=1}^m$ du plan. Il s'agit de déterminer l'ellipse d'aire minimale contenant tous ces points.

(a) Soit A une matrice symétrique et définie positive. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (Ax, x) = 1\}$ est une ellipse de centre 0. Etant donné un point quelconque x_0 du plan, déduire que $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (A(x - x_0), (x - x_0)) = 1\}$ est une ellipse de centre x_0.

(b) Montrer que l'aire de l'ellipse $\{(A(x - x_0), (x - x_0)) = 1\}$ est donnée par la formule

$$\text{Aire } = \pi \sqrt{\det A^{-1}}.$$

(c) Montrer que: minimiser l'aire revient à maximiser le déterminant de A, c'est-à-dire

$$\min \text{ Aire} \Longleftrightarrow \max \det A.$$

(d) Formuler mathématiquement le problème qui consiste à minimiser l'aire d'une ellipse quelconque contenant les m points $\{x_i\}_{i=1}^m$. Attention, les inconnues du problème sont les 3 coefficients a_{11}, a_{12}, a_{22} de la matrice A et les deux composantes du centre $x_0 = (\alpha, \beta)$ de l'ellipse. Il y a au total 5 variables à calculer. Pour établir les contraintes, il ne faudra pas oublier le fait que la matrice A doit être définie-positive.

(e) Créer de manière aléatoire 10 points du plan et résoudre le problème en (d) à l'aide de fmincon sans préciser le gradient. Représenter graphiquement l'ellipse et les points.

Question 3.

Soient deux sous-ensembles $U, V \subset \mathbb{R}^n$. On définit la distance minimale entre U et V par

$$d(U, V) = \min_{\substack{x \in U \\ y \in V}} \|x - y\|$$

C'est un problème de minimisation avec contraintes. Dans la pratique, on préfère résoudre

$$\min_{\substack{x \in U \\ y \in V}} \frac{1}{2}\|x - y\|^2$$

(a) Soit A une matrice symétrique et définie-positive. On pose $g(x) = (Ax, x) - 2(b, x) + c$ pour $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$ une constante. De plus, on définit l'ensemble $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$.

(i) Si $U \neq \emptyset$, montrer que U est un ellipsoide dans $\mathbb{R}^n$. Déterminer le centre x_0 de l'ellipsoide.
Suggestion: comparer les expressions de $g(x)$ et $(A(x - x_0), (x - x_0))$.

(ii) Déterminer l'ensemble des valeurs de c pour lesquelles $U \neq \emptyset$.

(iii) Déterminer le rayon r de la plus petite boule $B_r(x_0)$ centrée en x_0 et qui contient U, i.e. $U \subset B_r(x_0)$.
Suggestion: utiliser les inégalités

$$\lambda_1 \|y\|^2 \leq (Ay, y) \leq \lambda_n \|y\|^2$$

où λ_1 et λ_n sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de A.

(b) On pose

$$\begin{aligned} U &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A_1 x, x) - 2(b_1, x) + c_1 \leq 0\} \\ V &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A_2 x, x) - 2(b_2, x) + c_2 \leq 0\} \end{aligned}$$

En utilisant (a), établir un critère simple qui assure que $U \cap V = \emptyset$, autrement dit, $d(U, V) > 0$.

(c) Calculer la distance minimale entre deux ellipsoides U et V qui correspondent aux données

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}^t \qquad c_1 = 5$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}^t \qquad c_2 = 46$$

Vérifier que $U \cap V = \emptyset$ grâce à (b). Résoudre à l'aide de fmincon tout en précisant tous les gradients. Déterminer les points $x \in U$ et $y \in V$ qui réalisent le minimum.