DEVOIR 4

MAT-2410: Optimisation Automne 2014

A remettre vendredi le 19 décembre avant 16h00.

L'objectif du devoir est de mettre en oeuvre les algorithmes de minimisation traités en classe pour les problèmes d'optimisation avec contraintes. Il s'agira d'appliquer ces algorithmes dans des situations concrètes et de comparer les performances des différentes méthodes.

Notes

- Le devoir doit obligatoirement être réalisé à l'aide du logiciel Matlab.
- On remettra une copie papier du travail comportant les fichiers de Matlab ainsi que les réponse aux questions. De plus, on enverra par courriel une copie électronique des fichiers Matlab (M-file, script, etc.) de sorte que le professeur soit capable d'exécuter les programmes Matlab.

Question 1.

On désire résoudre par la méthode des multiplicateurs de Lagrange le problème

$$f(\bar{x}) = \min_{Bx=c} \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) \Longleftrightarrow \min_{Bx=c} f(x) \tag{1}$$

où A est une matrice symétrique définie-positive de format $n \times n$, B est une matrice de format $m \times n$ de rang maximal et $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^m$. On notera la solution par $\bar{x}$.

a) Ecrire la fonction lagrangienne $L(x, \lambda)$ associée au problème (1).

b) Déterminer les conditions d'optimalité du lagrangien $L(x, \lambda)$. Ecrire le résultat sous la forme d'un système linéaire par rapport aux variables x et λ.

c) Résoudre le problème (1) avec les données suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Question 2.

La méthode de pénalisation pour le problème (1) s'écrit

$$f(x_r) = \min_x f_r(x) = \min_x f(x) + \frac{r}{2}\|Bx - c\|^2 \tag{2}$$

de solution x_r.

a) Déterminer les conditions d'optimalité du problème (2). Ecrire le résultat sous la forme d'un système linéaire par rapport à la variable x.

b) Résoudre pour les données de la question 1c) pour $r = 1, 10^1, 10^2, \ldots, 10^6$. Vérifier numériquement que $\|x_r - \bar{x}\| \to 0$ si $r \to \infty$.

c) En comparant les conditions d'optimalité de $L(x, \lambda)$ de la question 1 et celle de la fonction f_r ci-dessus, montrer que

$$\lambda \approx r\ (B\,x_r - c) \equiv \lambda_r$$

Vérifier numériquement que $\|\lambda_r - \bar{\lambda}\| \to 0$ si $r \to \infty$ où $\bar{\lambda}$ est la valeur du multiplicateur de Lagrange calculée à la question 1.

Question 3.

Il s'agit de résoudre par la méthode des multiplicateurs de Lagrange le problème

$$\min_{\substack{x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1}} \frac{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 1)^2}{2} \tag{3}$$

a) Interpréter géométriquement le problème (3).

b) Ecrire la fonction lagrangienne $L(x, \lambda)$ associée au problème (3).

c) Nous savons que la condition d'optimalité s'écrit $\nabla L(x, \lambda) = 0$. On pose $F(x, \lambda) = \nabla F(x, \lambda)$. Calculer explicitement F et la matrice jacobienne DF pour ce problème.

d) Résoudre par la méthode de Newton à partir du point $(0.1, 0.1, 0.1)$ et $\lambda = (0, 0)$ avec un critère d'arrêt de $\|F\| \leq \epsilon = 10^{-8}$.

Question 4.

La méthode de pénalisation appliquée au problème (3) consiste à résoudre le problème approché sans contrainte

$$\min_x f_r(x) = \min_x \; f(x) + \frac{r}{2}\|g(x)\|^2 \tag{4}$$

où $g(x)$ sont les contraintes et $r > 0$ est le paramètre de pénalisation. Idéalement, on aura que la solution de (4) convergera vers la solution $\bar{x}$ du problème (3) lorsque $r \to \infty$.

(a) Pour le problème (3), évaluer le gradient et la matrice hessienne de la fonction f_r.

(b) Résoudre (4) par la méthode de Newton avec un critère d'arrêt de $\|\nabla f_r\| \leq \epsilon = 10^{-6}$. pour $r = 1, 10^1, 10^2, \ldots, 10^6$. Vérifier numériquement que $\|x_r - \bar{x}\| \to 0$ si $r \to \infty$ où $\bar{x}$ est la solution de la question 3.

(c) En comparant les conditions d'optimalité de $L(x, \lambda)$ de la question 3 et celle de la fonction f_r ci-dessus, déterminer une formule qui donne une valeur approchée λ_r du multiplicateur de Lagrange $\bar{\lambda}$ du problème de la question 3. Vérifier numériquement que $\|\lambda_r - \bar{\lambda}\| \to 0$ si $r \to \infty$.