EXAMEN TYPE 1

MAT-2410: Optimisation | Automne 2014

Question 1.

Soient A une matrice symétrique, définie-positive d'ordre n et B une matrice quelconque de format $m \times n$. On introduit la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + \frac{1}{2}\|Bx\|^2 - (b, x) + c$$

où $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.

a) Calculer ∇f, le gradient de f.

b) Calculer la matrice Hessienne de f.

c) Montrer que f est strictement convexe.

d) Ecrire la condition d'optimalité du premier ordre pour le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

Exprimer la réponse par rapport à A, B et b.

e) Montrer que le problème

$$\min_{x \in U} f(x) \qquad \text{avec} \qquad U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$$

admet une solution unique.

Question 2.

Répondre aux questions suivantes.

a) Montrer que le problème

$$\min_{x \geq 0, y \geq 0} x^2 + y^2 - xy + \sin x \sin y$$

admet une solution.

b) Montrer que la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^4}{12} + \frac{y^4}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy$$

est convexe.

c) Discuter de l'existence et de l'unicité de la solution du problème

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x^2 + 4y^2 + 2axy + 2x + 6y + 1$$

en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

Question 3.

On introduit la fonction f définie dans tout le plan $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + x\cos y$$

et on considère le problème de minimisation

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y).$$

a) Trouver tous les points critiques de f.

b) Parmi les points critiques, lesquels correspondent à des minima locaux. Justifier.

c) La fonction f est-elle coercive? Justifier.

d) Evaluer le premier itéré (x_1, y_1) à partir du point de départ $(x_0, y_0) = (1, \frac{\pi}{2})$ de la méthode de Newton appliquée à la résolution approchée du problème de minimisation de $f(x,y)$.

e) Evaluer le premier itéré (x_1, y_1) à partir du point de départ $(x_0, y_0) = (1, \frac{\pi}{2})$ en utilisant la méthode du gradient à pas constant de pas $\rho = 0.1$.

Question 4.

Montrer que le système d'équations non linéaires

$$\begin{cases} 6x + y + \cos x &= 0 \\ x + 2y + \sin y &= 0 \end{cases}$$

admet une solution unique $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$.

Suggestion: écrire le système sous la forme $\nabla f = 0$ et utiliser les principes de l'optimisation.

Question 5.

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur l'ensemble convexe $U \subset \mathbb{R}^n$.

a) Montrer que

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$$

pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ et pour tous les $x_1, x_2, x_3 \in U$.

b) Montrer l'inégalité

$$abc \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} + \frac{c^r}{r}$$

pour $a, b, c > 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ avec $p, q, r > 0$.

Suggestion: utiliser la convexité de la fonction e^x.

Question 6.

On considère deux surfaces S_1 et S_2 dans $\mathbb{R}^3$ d'équations

$$z = 1 + x^2 + y^2 \qquad \text{et} \qquad z = -(x-1)^2 - (y-1)^2$$

On veut calculer la distance minimale entre ces deux surfaces et les points qui réalisent ce minimum.

Traduire cet énoncé sous la forme d'un problème de minimisation de la forme

$$\min_{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4} F(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

où F est à préciser.

Question 7.

On considère le système non linéaire

$$\begin{cases} x - \sin y = 0 \\ -\cos x + y = 0 \end{cases} \tag{1}$$

a) Montrer à l'aide d'un dessin que le système ci-dessus possède une seule solution.

b) Ecrire l'algorithme de Newton pour résoudre le système (1).

c) Peut-on utiliser n'importe quel point comme point de départ de l'algorithme de Newton en b)? Si oui, justifier, sinon fournir un exemple de point qui ne fonctionne pas.

d) En fixant le point de départ à $(x_0, y_0) = (\pi/4, \pi/4)$, faire une itération de Newton.

On considère le problème de minimisation

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}\left((x - \sin y)^2 + (y - \cos x)^2\right) \tag{2}$$

e) Montrer directement que si $(\bar{x}, \bar{y})$ est une solution du système (1), alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est une solution du problème de minimisation (2).

f) Faire une itération de l'algorithme du gradient à pas constant pour le problème (2) à partir du même point de départ qu'en d). On prendra le pas ρ égal à $\rho = 2/3$.

Question 8.

Le problème de minimisation

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}(x^2 + 10y^2)$$

admet le point $(0, 0)$ comme étant l'unique point minimisant de cette fonction.

a) En partant du point initial $(x_0, y_0) = (1, 1/10)$, déterminer le prochain itéré (x_1, y_1) à l'aide de la méthode du gradient à pas optimaux.

b) En partant du même point $(x_0, y_0) = (1, 1/10)$, appliquer l'algorithme du gradient conjugué.

c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ qui soit A-conjuguée. Identifier la matrice A.

Question 9.

On considère le problème de minimisation

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

a) Trouver tous les points critiques de f.

b) Parmi les points critiques, lesquels correspondent à des minima locaux. Justifier.

c) Ecrire, en général, l'algorithme de Newton à partir de l'itéré (x_k, y_k).

d) En fixant le point de départ à $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$, évaluer le prochain itéré (x_1, y_1) à l'aide de l'algorithme de Newton. Pour cet essai, commenter la performance de l'algorithme.

Question 10.

A partir des points $(0, 2), (1, 3), (2, 8)$, on veut ajuster les coefficients a et b de la loi

$$y = e^{ax} + e^{-bx} \qquad\qquad a, b > 0$$

Pour cela, on utilise la formule des moindres carrés

$$\min_{(a,b)} f(a, b) = \min_{(a,b)} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (e^{ax_i} + e^{-bx_i} - y_i)^2 \tag{3}$$

a) Calculer la fonction $f(a, b)$ et son gradient $\nabla f(a, b)$.

b) Un problème de moindres carrés non linéaire à deux variables s'écrit sous la forme $\min_{(a,b)} \frac{1}{2} \|F(a, b)\|^2$. Pour le problème ci-dessus (3), identifier la fonction vectorielle $F(a, b)$.

c) Ecrire l'algorithme du gradient à pas constant à partir de l'itéré (a_k, b_k).

d) En fixant le pas $\rho = 1/10$, calculer le premier itéré de l'algorithme du gradient à pas constant à partir du point de départ $(a_0, b_0) = (1, 2)$.