EXAMEN TYPE 2

MAT-2410: Optimisation — Automne 2014

Question 1.

Répondre aux questions suivantes.

a) Soit le problème de minimisation posé dans $\mathbb{R}^n$, avec $a \in \mathbb{R}^n$ et $a \neq 0$,

$$\min_{x \in U} \sum_{i=1}^{n} a_i \, x_i$$

de solution $\bar{x} \in U$ où U est une partie convexe fermée d'intérieur non-vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il est impossible que la solution $\bar{x}$ se trouve à l'intérieur de U, i.e. $\bar{x} \in \operatorname{int} U$.

b) Fournir un exemple de problème quadratique dans $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$\min_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

où la solution se trouve à l'intérieur de $U = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ avec A symétrique, définie positive et b un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer le cône dual de l'ensemble convexe

$$U_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 2x_1, 3x_2 \geq 2x_1\}$$

d) Calculer le cône dual de l'ensemble convexe

$$U_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 2x_1, 3x_2 \geq 2x_1, x_1 + x_2 \leq 3\}$$

Question 2.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$f(x, y) = (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

a) Résoudre le problème de minimisation sous contrainte

$$\max_{\substack{\|x\|=1,\\ \|y\|=1}} \quad f(x,y)$$

c'est-à-dire

$$\max_{\substack{\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1,\\ \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1}} \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

b) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

c) Sous quelle condition a-t-on égalité?

Question 3.

On veut résoudre le problème

$$\min_{(x_1,x_2)\in U} 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2$$

où

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_2 + x_1^2 \leq 1\}$$

a) Représenter graphiquement l'ensemble U

b) Discuter de l'existence et de l'unicité de la solution du problème.

c) Résoudre le problème à l'aide des conditions de Kuhn-Tucker.

Question 4.

On désire calculer le minimum de la fonction

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

par rapport à l'ensemble des contraintes

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

a) Résoudre ce problème à l'aide des conditions de Kuhn-Tucker.

b) On introduit une variable supplémentaire x_3 et l'on transforme la contrainte sous la forme
$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$
Résoudre le nouveau problème
$$\min_{(x_1,x_2,x_3)\in U_1} \ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

c) Que pouvez-vous conclure en comparant les résultats de (a) et (b)?

Question 5.

Considérons le problème de minimisation quadratique
$$\min_{Bx=0} \frac{1}{2} (Ax, x) - (b, x)$$
où A est une matrice symétrique d'ordre n définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et B est une matrice de format $m \times n$ de rang maximal, i.e. $rg(B) = m$ avec $m \leq n$.

a) Ecrire la fonction de Lagrange $L(x, \lambda)$ pour ce problème (méthode des multiplicateurs de Lagrange).

b) Montrer que, pour λ fixé, la solution du problème sans contrainte
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} L(x, \lambda)$$
est donnée par
$$x(\lambda) = A^{-1} (b - B^t\lambda).$$

c) Evaluer la fonction numérique $h(\lambda)$ définie par
$$h(\lambda) = -L(x(\lambda), \lambda)$$
Simplifier au maximum votre réponse et exprimer en fonction de A, b et B.

d) Peut-on affirmer que la fonction $h(\lambda)$ est une fonction quadratique? Si oui, exprimer h sous la forme standard
$$h(\lambda) = \frac{1}{2} (C\lambda, \lambda) - (d, \lambda)$$
où C et d sont à préciser.

Question 6

On veut résoudre le problème de maximisation

$$\max_{(x,y)\in U} 2x - x^2 + y$$

où l'ensemble des contraintes correspond à

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

(a) Ecrire les conditions de Kuhn-Tucker associé à ce problème.

(b) Trouver le point optimal en résolvant le système de Kuhn-Tucker.

(c) Représenter graphiquement l'ensemble U ainsi que la courbe de niveau de f passant par le point optimal. Illustrer la condition d'optimalité en ce point.

Question 7.

Le plan $x + y + 2z = 2$ coupe le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ selon une ellipse. Il s'agit de déterminer les points de cette ellipse qui sont le plus proche et le plus éloigné de l'origine.

a) Ecrire cet énoncé sous la forme d'un problème d'optimisation

$$\min_{g(x,y,z)=0} f(x, y, z) \qquad \text{ou} \qquad \max_{g(x,y,z)=0} f(x, y, z)$$

où $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$. Identifier la fonction objective $f(x, y, z)$ et les contraintes $g_1, g_2, \ldots, g_m$.

b) Résoudre par la méthode des multiplicateurs de Lagrange et trouver les points de l'ellipse le plus près et le plus éloigné de l'origine.

Question 8.

Considérons le problème de minimisation

$$\min_{(x,y)\in U} \frac{(x-3)^2 + (y-2)^2}{2}$$

où l'ensemble des contraintes est donné par

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 5,\ x + 2y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

a) Représenter graphiquement l'ensemble U.

b) Le problème ci-dessus admet-il une solution? Si oui, possède-t-il plusieurs solutions? Justifier vos réponses.

c) Ecrire les conditions de Kuhn-Tucker associées à ce problème.

d) Résoudre le système de Kuhn-Tucker. Identifier la solution optimale du problème.

Question 9.

Soit A une matrice rectangulaire de format $m \times n$ avec $m < n$ et de rang maximal, i.e. $rg(A) = m$. On considère le problème de minimisation

$$\min_{Ax=b} \frac{||x||^2}{2}$$

où $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Discuter de l'existence et de l'unicité de la solution. Justifier.

b) Ecrire le Lagrangien associé à ce problème.

c) Ecrire les conditions d'optimalité du Lagrangien sous la forme d'un système linéaire posé dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

d) Si, par exemple, l'équation $Ax = b$ est donnée par

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

fournir une interprétation géométrique du problème de minimisation.

Question 10.

Soient B et C deux matrices rectangulaires respectivement de format $m \times n$ et $p \times n$.
On introduit l'ensemble

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx = 0 \quad \text{et} \quad Cx \geq 0\}.$$

a) Montrer que U est un cône convexe, fermé, de sommet 0.

b) En notant par

$$\mathrm{Im}B^t + C^t K_+ = \{B^t\lambda_1 + C^t\lambda_2 \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}^m, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}^p, \quad \lambda_2 \geq 0\},$$

prouver que

$$\mathrm{Im}B^t + C^t K_+ \subset U^*.$$

c) De même, montrer que

$$\left(\mathrm{Im}B^t + C^t K_+\right)^* \subset U.$$

d) Déduire que

$$U^* = \mathrm{Im}B^t + C^t K_+.$$

e) Si f est une fonction numérique de classe C^1 définie dans $\mathbb{R}^n$, écrire les conditions d'optimalité du problème de manière analogue à celles de Kuhn-Tucker (ou encore celles des multiplicateurs de Lagrange)

$$\min_{x \in U} f(x).$$

On devra utiliser la sous-question (d).