**Automne 2014**

**MAT-2410 : optimisation**
**exercices – série 1**

1. Les fonctions suivantes $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont-elles coercives

   (a) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1$,
   (b) $f(x,y) = 2x^2 + y^3 + 2y^2$,
   (c) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$,
   (d) $f(x,y) = x^2 - y^2$,
   (e) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \sin x \sin y$,
   (f) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$?

2. A l'aide du théorème d'existence des minima, montrer que l'équation

$$x = \cos x$$

   admet une solution.
   Suggestion: trouver une fonction $f$ pour laquelle $x - \cos x = f'(x) = 0$ et utiliser le fait qu'au point minimisant, on doit avoir $f'(x) = 0$.

3. En utilisant la même approche que la question précédente, montrer l'existence d'une solution au système non linéaire

$$\begin{cases} x = \cos x \sin y \\ y = \sin x \cos y \end{cases}$$

4. Montrer que la fonction de Rosenbrock $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 100(y - x^2)^2 + (1-x)^2$$

   est à section inférieure bornée. Sans faire de gros calculs, identifier le point minimisant $(\bar{x}, \bar{y})$

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$$

5. Soit $A$ une matrice rectangulaire de format $m \times n$ avec $m > n$ et de rang maximal, i.e. $rg(A) = n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

(a) Posons $f(x) = \dfrac{1}{2}\,\|Ax - b\|^2$. Montrer que $f$ est coercive.

(b) En déduire l'existence d'une solution du problème de moindres carrés

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$$

6. Etant donné un ensemble de points $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ du plan, on considère le problème de la régression linéaire

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (a\,x_i + b - y_i)^2.$$

(a) Ecrire la fonction objective sous la forme matricielle

$$f(a,b) = \frac{1}{2}\,\|A\,\vec{x} - \vec{b}\|^2$$

où $\vec{x} = (a,b)$. Identifier la matrice $A$ et le vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

(b) En déduire l'existence d'une solution du problème de la régression linéaire.

7. Considérons le système linéaire

$$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de solution $x = (-1, 1)$.

(a) Tracer la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}\,(Ax, x) - (b, x)$ et vérifier que $(-1, 1)$ est l'unique point minimisant.

(b) Montrer que le problème

$$\min_{x_1,x_2\geq 0} f(x)$$

admet une solution. Trouver graphiquement la solution de ce problème.

(c) Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et fermé d'intérieur non vide. Montrer que si $(-1,1) \in K$, alors le point $(-1,1)$ est la solution du problème $\min\limits_{x\in K} f(x)$.

(d) Montrer que si $(-1,1) \notin K$, alors la solution du problème $\min\limits_{x\in K} f(x)$ se trouve nécessairement sur la frontière de $K$.

8. On notera par $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|$ la norme $l_1$ d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que $f(x) = \|x\|_1$ est coercive.

Suggestion: comparer cette norme avec la norme usuelle $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

(b) Sous les mêmes hypothèses que la question 5, déduire que la fonction $f(x) = \|Ax - b\|_1$ est coercive.

(c) Etant donné un ensemble de points $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{m}$ du plan, on considère le nouveau problème de régression linéaire avec la fonction objective suivante

$$f(a, b) = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{m} |a\, x_i + b - y_i|.$$

Montrer que le problème $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} f(a, b)$ admet une solution. On notera que la fonction $f$ n'est pas dérivable.