Automne 2014

MAT-2410 : optimisation
exercices – série 2

1. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe définie sur un ensemble convexe, montrer que

$$f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) \qquad \forall x_i \in U,$$

pour toutes les combinaisons convexes qui vérifient $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et $\lambda_i \geq 0$.

2. Soit p, q deux nombres réels positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, démontrer l'inégalité de Young

$$a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Suggestion: utiliser le fait que $f(x) = e^x$ est convexe et que $a^p = e^{\ln a^p}$.

3. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le vecteur gradient et la matrice hessienne:

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - y$
   (b) $f(x, y) = 2x + 4 + x^2y - 4xy + 3y$
   (c) $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^2 - 1$
   (d) $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$

4. Utiliser la technique vue au cours pour calculer le vecteur gradient et la matrice hessienne de la fonction

$$f(x) = \ln(Ax, x) \equiv \ln(x^t Ax) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

sous l'hypothèse que A est symétrique et définie -positive.

5. Montrer que la fonction

$$f(x) = \sin x + (1 + x)^2$$

est convexe dans $\mathbb{R}$.

6. On considère la fonction
$$f(x,y) = Cx^a y^b$$
définie sur le premier quadrant $\{x, y \geq 0\}$ et $a, b, C > 0$ sont des paramètres positifs. Si $a+b = 1$, montrer que f est concave.

7. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconque, on définit la fonction $f^* : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par la formule
$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - f(x))$$
   (a) Montrer que f^* est convexe.
   (b) Montrer que $-f^*(0) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$
   (c) Calculer explicitement la fonction f^* pour $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$.
   (d) Refaire (c) pour $f(x) = e^x$. Bien identifier la région où $f(x) = \infty$.

8. Montrer que les fonctions suivantes sont strictement convexes:
   (a) $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy + 4xz - x + y + 7$,
   (b) $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy + 4xz - x + y + 7 + e^{(x+y+z)}$,
   (c) $f(x,y,z) = 1/x + 1/y + 1/z$ pour f définie dans $\{x, y, z > 0\}$,
   (d) $f(x,y,z) = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{y^4}{12} + x^2 + y^2 + z^2 - xy$.

9. Montrer que le problème
$$\min_{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} \frac{x^4}{12} + \frac{y^4}{12} + x^2 + y^2 + z^2 - xy$$
admet une solution unique.