Automne 2014

MAT-2410 : optimisation
exercices – série 3

1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe fermé. On note par $P_U(z)$ l'unique solution du problème de minimisation
$$\min_{x\in U} \|x-z\| \Longleftrightarrow \min_{x\in U} \frac{1}{2}\|x-z\|^2$$
Il s'agit du calcul de la projection orthogonale du point z sur l'ensemble U. Montrer que la solution $P_U(z)$ est entièrement déterminée par la condition d'optimalité
$$(z - P_U(z), x - P_U(z)) \leq 0 \quad \forall x \in U.$$
Fournir une interprétation géométrique de la condition d'optimalité.

2. Soit $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$. Montrer que
$$P_U(x) = \max\{0, x\}$$
où $\max\{0, x\}$ est le vecteur de composantes $\max\{0, x_i\}$.

3. Evaluer les cônes duaux des ensembles suivants.
   (a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, \quad y \geq 0\}$
   (b) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 5y \geq 0, \quad 2x + 3y \leq 0\}$
   (c) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y \geq 0, \quad 10x + 5y \leq 0\}$
   (d) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0, \quad 2x + 3y \geq 0\}$
   (e) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1, \quad x, y \geq 0\}$

4. Soit $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ la boule unité et fermée. On note par $int\,U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ l'intérieur de la boule unité et $\partial U = \{\|x\| = 1\}$ sa frontière. Finalement, pour un point quelconque x_0, on note
$$U_{x_0} = U \setminus x_0 = \{x - x_0 \in \mathbb{R}^n \mid x \in U\}.$$
   (a) Dans le cas général, montrer que U_{x_0} est convexe si U est convexe.
   (b) Si $x_0 \in int\,U$, montrer que le cône dual $U^*_{x_0} = \{0\}$.
   (c) Si $x_0 \in \partial U$, montrer que $U^*_{x_0} = \{\lambda x_0 \mid \lambda \leq 0\}$.

5. On considère le problème de minimisation

$$\min_{\|x\|\leq 1} (a,x)+c$$

où $a\in\mathbb{R}^n, a\neq 0$ et $c\in\mathbb{R}$.

   (a) Ecrire la condition d'optimalité du problème.
   (b) Utiliser l'exercice précédent pour déterminer la solution de ce problème.

6. Résoudre le problème de minimisation avec contraintes

$$\min_{x_1,x_2\geq 0} \frac{1}{2}\left((x_1-1)^2+(x_2+2)^2+x_1x_2 \right)$$

Utiliser l'information fournie par l'ensemble des contraintes U et la condition d'optimalité $(\nabla f(a), x-a)\geq 0 \quad \forall x\in U$. Cette remarque s'applique pour les autres questions qui suivent.

7. Résoudre le problème

$$\min_{\substack{x_1^2+x_2^2\leq 1\\ x_1+x_2\leq 1}} \frac{1}{2}\left((x_1-1)^2+(x_2-2)^2 \right)$$

8. Résoudre le problème

$$\min_{\substack{x_2\leq x_1\\ x_1+x_2\leq 2\\ x_2\geq 0}} \frac{1}{2}\left((x_1-1)^2+(x_2-2)^2 \right)$$

9. Résoudre le problème de programmation linéaire

$$\max_{\substack{2x_1+x_2\leq 2\\ x_1+3x_2\leq 3\\ x_1,x_2\geq 0}} x_1+x_2$$

10. Résoudre le problème

$$\min_{\substack{x_2\leq 0\\ x_1+1\leq 0\\ x_1+x_2\leq -2}} \frac{1}{2}\left((x_1-5)^2+(x_2-3)^2 \right)$$